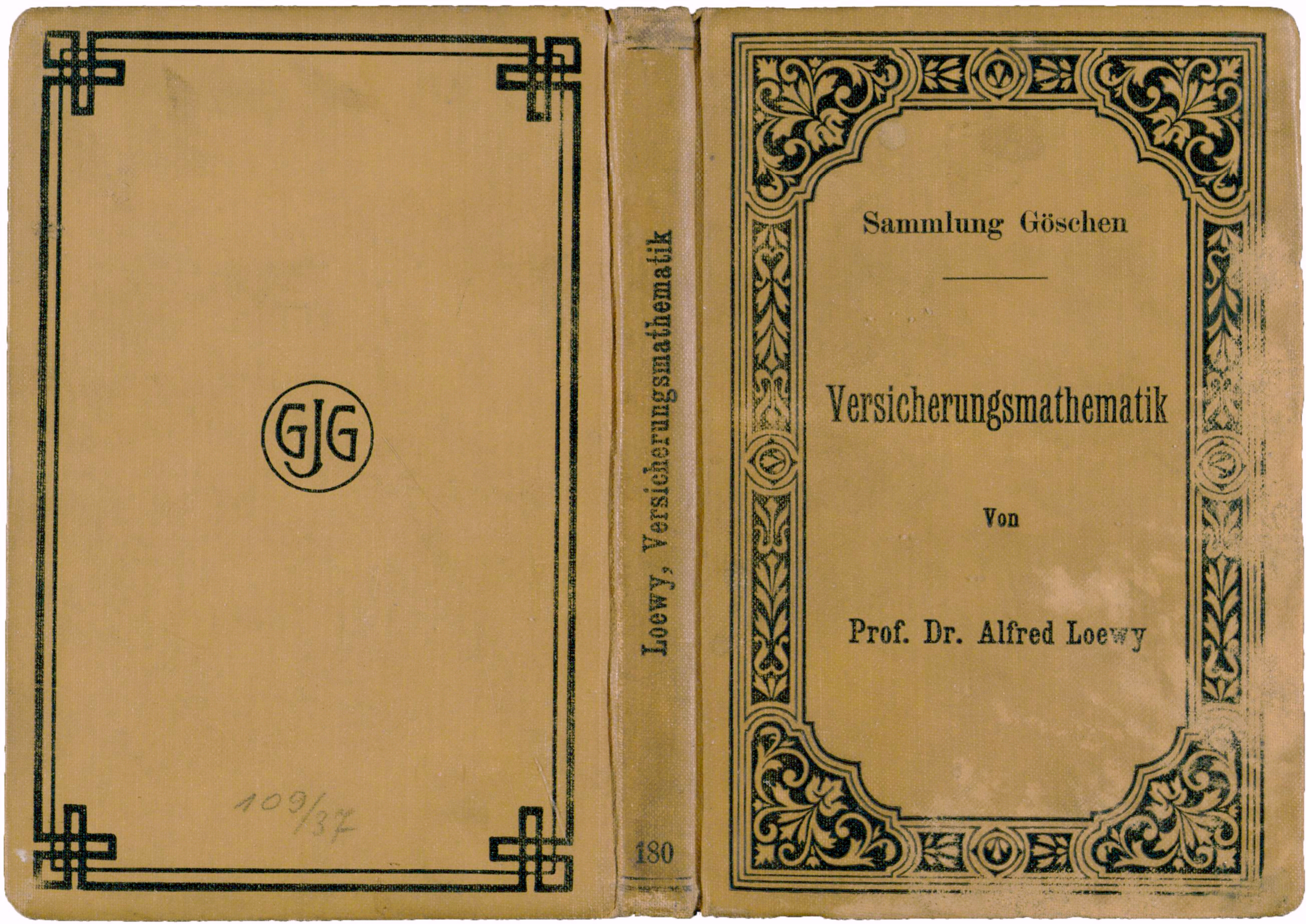


GJG
109/37
Loewy, Versicherungsmathematik
180
Sammlung Göschen
Versicherungsmathematik
Von
Prof. Dr. Alfred Loewy

Mathematische Bibliothek

aus der Sammlung Göschen.

Jedes Bändchen eleg. in Leinwand gebunden **80 Pfennig.**

Geschichte der Mathematik von Dr. A. Sturm, Professor am Obergymnasium in Seitenstetten. Nr. 226.

Arithmetik u. Algebra von Prof. Dr. Hermann Schubert. Nr. 47.

Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra von Professor Dr. Hermann Schubert. Nr. 48.

Ebene Geometrie m. 110 zweifarb. Fig. v. Prof. G. Mahler. Nr. 41.

Darstellende Geometrie I mit 110 Figuren von Professor Dr. Rob. Haußner. Nr. 142.

— — **II.** Mit 40 Figuren. Nr. 143.

Ebene und sphärische Trigonometrie mit 70 Figuren von Dr. Gerhard Hessenberg. Nr. 99.

Stereometrie mit 44 Figuren von Dr. Glaser. Nr. 97.

Niedere Analysis m. 6 Figuren von Dr. Benedikt Sporer. Nr. 53.

Vierstellige Logarithmen von Prof. Dr. Hermann Schubert. In zweifarbigem Druck. Nr. 81.

Fünfstellige Logarithmen von Prof. Aug. Adler, Direktor der k. k. Staatsoberrealschule in Wien. Nr. 423.

Analytische Geometrie der Ebene mit 57 Figuren von Professor Dr. M. Simon. Nr. 65.

Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie der Ebene mit 32 Figuren von Professor O. Th. Bürklen. Nr. 256.

Analytische Geometrie des Raumes mit 28 Abbildungen von Professor Dr. M. Simon. Nr. 89.

Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie des Raumes mit 8 Figuren von Prof. O. Th. Bürklen. Nr. 309.

Höhere Analysis I: Differentialrechnung mit 68 Figuren von Professor Dr. Friedrich Junker. Nr. 87.

Höhere Analysis II: Integralrechnung mit 89 Figuren von Professor Dr. Friedrich Junker. Nr. 88.

Repetitorium u. Aufgabensammlung zur Differentialrechnung m. 46 Figuren v. Prof. Dr. Friedr. Junker. Nr. 146.

Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung m. 50 Figuren v. Prof. Dr. Friedr. Junker. Nr. 147.

Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung mit 91 Fig. von Professor Dr. K. Doehlemann. Nr. 72.

Mathematische Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik mit 18 Fig. von Prof. O. Th. Bürklen. Nr. 51.

Versicherungsmathematik v. Prof. Dr. Alfred Loewy. Nr. 180.

Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate m. 15 Fig. u. 2 Taf. v. Prof. Wilh. Weitbrecht. Nr. 302.

Vektoranalysis mit 11 Figuren von Privatdoz. Dr. Siegfr. Valentiner. Nr. 354.

Determinanten von Paul B. Fischer, Oberlehrer an der Oberrealschule zu Groß-Lichterfelde. Nr. 402.

Astronomische Geographie mit 52 Figuren von Professor Dr. Siegm. Günther. Nr. 92.

Astronomie mit 36 Abbildungen und einer Karte von Professor Dr. Walter F. Wislicenus. Nr. 11.

Astrophysik mit 11 Abb. von Prof. Dr. Walter F. Wislicenus. Nr. 91.

Geodäsie mit 66 Abbildungen von Prof. Dr. C. Reinhertz. Nr. 102.

Nautik. Kurzer Abriß des täglich an Bord von Handelsschiffen angewandt. Teils d. Schiffahrtskunde m. 56 Abb. v. Dr. Franz Schulze. Nr. 84.

Geometrisches Zeichnen mit 290 Figuren und 23 Tafeln von H. Becker, neubearbeitet von Prof. J. Vonderlinn. Nr. 58.

Sur

Sammlung Göschen

Versicherungs-Mathematik

Von

Dr. Alfred Loewy
Professor an der Universität Freiburg i. B.

Zweite, umgearbeitete Auflage

GJG

Leipzig
G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
1910

Literatur.

E. Blaschke, Vorlesungen über mathematische Statistik (Bd. 23 von Teubners Lehrbüchern der math. Wissenschaften). Leipzig 1906.

G. Bohlmann, Lebensversicherungs-Mathematik in der Encyklopädie der math. Wissenschaften, Bd. I, S. 852—917. Leipzig 1901.

L. von Bortkiewicz, Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Statistik in der Encyclopädie der math. Wissenschaften, Bd. I, S. 821—851. Leipzig 1901.

U. Broggi, Traité des assurances sur la vie, traduit de l'italien par S. Lattès. Paris 1907.

M. Cantor, Politische Arithmetik. Leipzig 1898. 2. Aufl. 1903.

E. Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. Leipzig 1902/03. (Bd. 9 von Teubners Lehrbüchern der math. Wissenschaften.) Von der 2. Aufl. ist erschienen Bd. I, 1908.

Institute of actuaries' textbook of the principles of interest, life annuities and assurances and their practical application. Part I: Interest by R. Todhunter. Part II: Life contingencies by G. King. 2. Aufl. London 1901/1902.

J. Karup, Die Reform des Rechnungswesens der Gothaer Lebensversicherungsbank. Jena 1903.

W. Karup, Theoretisches Handbuch der Lebensversicherung. 3. Aufl. Leipzig 1885.

C. Landré, Mathematisch-technische Kapitel zur Lebensversicherung. 3. Aufl. Jena 1905.

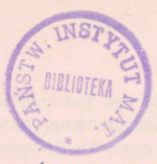
A. Manes, Versicherungswesen (B. G. Teubners Handbücher für Handel und Gewerbe). Leipzig 1905.

A. Manes, Versicherungslexikon, ein Nachschlagewerk für alle Wissensgebiete der Privat- und der Sozial-Versicherung, insbesondere in Deutschland, Österreich und der Schweiz. Tübingen 1909.

A. Zillmer, Die mathematischen Rechnungen bei Lebens- und Rentenversicherungen. 2. Aufl. Berlin 1887.

In dem vorliegenden Werkchen ist die an das Textbook des Institute of actuaries sich anschließende, auf dem zweiten internationalen Kongresse zu London eingeführte einheitliche Bezeichnung verwandt. Vgl. Transactions of the second international actuarial congress (1898), S. 582—640.

Druck der Spamerschen Buchdruckerei in Leipzig.



Inhaltsverzeichnis.

Vorbemerkung: Im folgenden wird statt des Wortes Versicherung nur V. gesetzt.

Einleitung.

Eine V. stellt eine wirtschaftliche Einrichtung dar, die es dem einzelnen in Vereinigung mit einer Vielheit von Personen ermöglicht, durch einmalige oder periodische Geldleistungen — Prämien — vorsorgliche Maßregeln für zukünftigen Vermögensbedarf zu treffen. Dieser hat vertragsgemäß stets mit einer Ungewißheit in Dauer oder Höhe der Verpflichtungen des Versicherten (V'snehmer) oder des Versichernden (Versicherers) verknüpft zu sein; hierbei muß es möglich sein, die Leistung des einzelnen Versicherten und die Gegenleistung des Versicherers so festzusetzen, daß sie sich bei einer hinreichend großen Zahl von Versicherten in einem entsprechend langen Zeitraum voraussichtlich ausgleichen[1]).

Gegenstand einer V. können entweder wirtschaftliche Güter und Vermögensinteressen oder Ereignisse im menschlichen Leben sein; demnach kann man die V. einfach zweiteilen in:

1. Sach- und Vermögensinteressen-V.,
2. Personen- oder Menschen-V.

Man versichert Gebäude, Geräte und Waren gegen Brand oder Explosion in der Feuerv., gegen Schaden infolge Bruches der Wasserleitung in der V. gegen Wasserleitungsschäden, die Gemarkung gegen die Gefahr des Hagels in der Hagelv., das Vieh gegen Tod, notwendig werdende Tötung oder Wertverminde-

[1]) Vgl. hierzu die Artikel „Begriff" von V. Ehrenberg und W. Lexis und „Versicherung" von A. Manes in Manes' V's-Lexikon. Tübingen 1909.

rung infolge von Krankheit in der Viehv., das Schiff und seine Ladung gegen die Gefahren der Seefahrt in der Seev., Güter gegen die ihnen beim Transport im Binnenverkehr drohenden Gefahren in der Landtransportv.; eine Abart der Transportv. ist die Postwert- oder Valorenv., d. h. die V. von Wertgegenständen (Geld, Wertpapieren u. dgl.), die in Paketen oder Briefen versandt werden. Glasgegenstände, vorzüglich die großen Spiegelscheiben der Verkaufsläden, Glasdächer, Firmenschilder, werden gegen Bruch in der Glasv. versichert.

Die aufgeführten V'szweige haben es mit Sachen, die an ihrer Substanz Beschädigungen erleiden, zu tun. Wer in einer Haftpflichtv. gegen Ersatzpflichten, die er anderen Personen gegenüber zu leisten in die Lage kommen kann, Deckung sucht, sieht seine Vermögensinteressen möglicherweise bedroht. Etwas Ähnliches findet statt, wenn eine V'sgesellschaft, der nach dem Umfang ihres Geschäftes eine bei ihr für irgendwelche Zwecke versicherte Summe zu groß erscheint, einen Teil des Risikos bei einer anderen V'sgesellschaft versichert oder, wie man sagt, eine Rückv. eingeht. Zum Schutze der Vermögensinteressen dient auch die V. gegen Kursverluste bei Auslosungen von Wertpapieren, Auslosungs- oder Wertpapierv. genannt, sowie die V. gegen Veruntreuungen, die sogenannte Garantie- oder Unterschlagungsv.

Von den V'szweigen, die sich auf das menschliche Leben beziehen, führen wir zunächst die Invaliden-, die Unfall- und die Krankenv. an. Bei diesen verpflichtet sich die V'sgesellschaft, dem Versicherten im Falle der Invalidität, bei Eintritt gewisser Unfälle, etwa auf Reisen oder im Fabrikbetriebe, sowie während Krankheit Vergütungen zu gewähren.

Bei den angegebenen Personenv'en spielt neben dem Tode eines Menschen noch die Minderung seiner Arbeitskraft eine Rolle; ihnen gegenüber stehen die verschiedenen Arten der Lebensv., bei denen die Länge der zu erreichenden Lebensdauer des Versicherten die einzige in Frage kommende Zufälligkeit ist. Von den mannigfachen Gattungen des Lebensv'sgeschäftes, bei dem es sich entweder um Kapitalv. auf eine einmalig von der V'sanstalt zu zahlende, im voraus vertragsmäßig festgesetzte Summe oder um Rentenv. auf bestimmte, wiederholt zu zahlende Beträge handelt, heben wir hier nur die einfache Leibrentenv., die einfache Kapitalv. auf den Todesfall, die gemischte oder alternative Lebensv. und die Erlebensv. hervor. Bei der Leibrentenv. übernimmt das V'sinstitut, dem Versicherten von einem gewissen Zeitpunkt an, zumeist lebenslänglich, in bestimmten Zeitabschnitten wiederkehrend, die gleiche, vertragsmäßig festgesetzte Summe zu zahlen. Bei der einfachen Kapitalv. auf den Todesfall, auch eigentliche Lebensv. genannt, hat die V'sgesellschaft einmalig bei dem Tode des Versicherten an seine Erben eine bestimmte, vertragsmäßig festgesetzte Summe zu zahlen. Bei der gemischten V., der heute in Deutschland gebräuchlichsten Lebensv'sform, wird die versicherte Summe spätestens bei Vollendung eines im Vertrage festgesetzten Lebensalters und bei früherem Ableben nach dem Tode des Versicherten ausgezahlt. Bei der Erlebensv., auch V. auf den Lebensfall genannt, erhält der Versicherte nur dann die versicherte Summe ausgezahlt, wenn er ein gewisses Lebensalter erreicht.

In den Kreis der Personenv. gehört auch die sogenannte Sozialv., die sich auf dem Prinzip des Zwanges

aufbaut und die Fürsorge für die wirtschaftlich schwächeren Bevölkerungsklassen zum Gegenstand hat. Im Deutschen Reich besteht für die Arbeiter und die ihnen sozial und wirtschaftlich nahestehenden Personenklassen obligatorische Kranken-, Unfall-, Alters- und Invalidenv.

Jede Form der V. weist vier charakteristische Merkmale auf. Sie ist erstens eine vorsorgliche Tätigkeit für die Zukunft, die den Zweck hat, sich vor Schaden oder Verlust zu schützen oder sich selbst bzw. anderen eine Sparsumme zu sichern. Zweitens enthält jeder V'svertrag ein ungewisses Moment. Bei den Sachv'en ebenso wie bei gewissen Personenv'en handelt es sich um Schaden-, Verlust- oder Bedarfsmöglichkeiten, die bei dem einzelnen nie einzutreten brauchen. Hier liegt die Ungewißheit für den einzelnen Versicherten darin, ob die Leistung des Versicherers überhaupt je fällig werden wird. Bei der eigentlichen Todesfallv. findet die Auszahlung jedenfalls statt; das ungewisse Moment bildet hier der Zeitpunkt des Todes bei dem einzelnen Versicherten.

Fragen wir uns: Warum geht jemand derartige V'en ein? Wer seinen Erben bei seinem Tode ein gewisses Kapital hinterlassen will, tritt nur deswegen einer Lebensv. bei, weil er den Zeitpunkt seines Todes nicht kennt; wüßte der Betreffende im voraus, daß ihm ein besonders langes Leben bestimmt ist, so könnte er sich das fragliche Kapital, ja sogar noch mehr, durch wiederholte zinstragende Anlage der zu zahlenden Prämien einfach ersparen. Wer sich gegen Zahlung einer einmaligen Prämie von einer V'sanstalt für die Dauer seines Lebens eine alljährlich zur Auszahlung gelangende Leibrente sichert, würde es nicht tun, wenn er wüßte, daß ihn der Tod früher als den Durchschnitt

seiner Altersgenossen ereilt. Eine Erlebensv. schließt gewiß niemand ab, der vor Erreichung jenes Lebensalters zu sterben fürchtet, zu dem er die versicherte Summe ausgezahlt erhalten soll. Aus den angeführten Beispielen ergibt sich als drittes charakteristisches Moment: der vertragsmäßig festgesetzte Vermögensbedarf wird, wenn er bei dem einzelnen eintritt, von der Gesamtheit der Versicherten getragen.

Das vierte Kennzeichen einer sich auf richtig wirtschaftlicher Grundlage aufbauenden V. ist die Möglichkeit, annäherndes Gleichgewicht zwischen den Leistungen der Versicherten und den Gegenleistungen des Versicherers herzustellen. Unentbehrliche Grundlage hierzu bilden statistische Unterlagen; sie haben den Zweck, den Verlauf einer großen Anzahl derartiger Ereignisse, wie sie für den betreffenden V'szweig in Frage kommen, aus der Vergangenheit möglichst genau zu verzeichnen. Die so gesammelten Erfahrungstatsachen legt man der Rechnung zugrunde und bestimmt aus ihnen Leistung und Gegenleistung von Versichertem und Versicherndem, indem man annimmt, daß die Zukunft nicht wesentlich von der Vergangenheit abweichen wird. Man versucht also von dem vergangenen Geschehen auf künftige, noch unbekannte Tatsachen eine Prophezeiung auszuführen; allerdings kann und soll sich dieselbe nur auf das Geschehen im allgemeinen bei einer großen Zahl von Fällen und genügend ausgedehntem Beobachtungsgebiete beziehen.

Ohne statistisches Material keine mathematische Behandlung von V'en! Für eine Reihe von V'szweigen existiert kein oder nur sehr ungenügendes statistisches Material; die V'sanstalt ist sich selbst nicht der Höhe des zu übernehmenden Risikos bewußt. Leistung und

Gegenleistung von Versichertem und Versicherndem richten sich dann häufig nur nach den Tarifen der Konkurrenz.

Der besten statistischen Grundlagen erfreut sich das Lebensv'sgeschäft; denn von allen Massenerscheinungen — nur gegen solche können V'en abgeschlossen werden — ist wohl die Sterblichkeit der Menschen am längsten und eingehendsten wissenschaftlich beobachtet worden. Die älteste, als wissenschaftlich konstruiert zu bezeichnende Sterblichkeitstafel verdankt man dem berühmten englischen Astronomen Edmund Halley (1656 bis 1742); sie erschien 1693 und ist auf Grund der Toten- und Geburtslisten der Stadt Breslau für den Zeitraum 1687—1691 hergestellt[1]). Heute besitzen die Lebensv'sanstalten infolge ihrer langen Tätigkeit eigene Erfahrungen über die Sterblichkeit von Versicherten, also gerade des für sie in Frage kommenden Materials. Diese Aufzeichnungen sind wissenschaftlich verarbeitet und dienen den Gesellschaften als Grundlage bei ihrem Geschäft.

Auch die guten und in langer Praxis wohlbewährten mathematischen Berechnungen gerade des Lebensv'sgeschäftes verdienen hervorgehoben zu werden. Schon 1671 berechnete der holländische Staatsmann Jan de Witt[2]) den Barwert einer lebenslänglichen Leibrente; er nahm, um eine Grundlage für seine Berechnungen zu

---

[1]) Vgl. G. F. Knapp, Theorie des Bevölkerungswechsels, S. 57 u. 122. Braunschweig 1874. J. Graetzer, Edmund Halley und Caspar Neumann (1883). R. Boeckh, Halley als Statistiker, Bulletin de l'institut international de statistique, t. 7, Rome 1893. M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 2. Aufl. Leipzig 1900, Bd. III, S. 49. H. Westergaard, Die Lehre von der Mortalität und Morbilität, 2. Aufl. Jena 1901, S. 34.

[2]) Vgl. M. Cantor, a. a. O., S. 45. G. Eneström, Sur la méthode de Johan de Witt (1671) pour le calcul de rentes viagères, Archief voor de Verzekeringswetenschap, Deel III, Aft. 1, ebenda Aft. 5 (1898). H. Westergaard, a. a. O., S. 33.

gewinnen, eine hypothetische Verteilung der Todesfälle nach dem Alter an. 1724 übergab der berühmte Mathematiker Abraham de Moivre[1]) ein Büchlein „Annuities upon lives" dem Drucke, in dem auch schon der Wert verbundener Leibrenten berechnet wird.

Vom mathematischen Standpunkte sind auch die V'en auf das Leben interessanter als die Sachv'en. Eine Sachv. läßt sich innerhalb eines Jahres abwickeln; für dasselbe Wohnhaus bezahlt man, wenn man es in einer Feuerv. zu verschiedenen Zeiten auf je ein Jahr in der gleichen Höhe versichert und die V'sanstalt nicht überhaupt gerade ihre Tarife in der Zwischenzeit verändert hat, die gleiche Prämie. Die V'sanstalt, welche gegen Brand versichert, wird in verschiedenen Jahrgängen bei gleichem Umfang des Geschäftes, wenn sie nur groß genug ist, annähernd dieselbe Summe für Brandschäden zu zahlen haben, wie man nach dem Gesetz der großen Zahlen annehmen darf. Hingegen handelt es sich z. B. bei der Todesfallv. um ein auf die ganze Lebensdauer des Menschen sich erstreckendes Geschäft. Will eine Person eine Todesfallv. eingehen, so hängt die Höhe ihrer Leistungen bei genau derselben V'ssumme von ihrem Lebensalter ab; die Sterbenswahrscheinlichkeit eines jeden Menschen steigt, abgesehen von der Kindheit, mit wachsendem Lebensalter. Soll nun von dem Versicherten lebenslänglich alljährlich die gleiche Summe bezahlt werden, so muß die V'sanstalt, um ihrer Verpflichtung nachkommen zu können, die Höhe der Prämie mit Rücksicht darauf, daß sie die Sterbesumme sicher einmal bezahlen muß, und sie es mit einem nicht konstanten, sondern von Jahr zu Jahr wachsenden

---

[1]) A. de Moivre, Abhandlungen über Leibrenten. Nach der 3. Aufl. von 1756 ins Deutsche übertragen von E. Czuber. Wien 1906.

Risiko zu tun hat, festsetzen; hieraus ergibt sich, wie wir sehen werden, das den V'en mit von Jahr zu Jahr veränderlichem Risiko eigentümliche Deckungskapital, welches die Lebensv'sanstalt bilden muß.

Mit Rücksicht auf ihr höheres mathematisches Interesse, ihre Bedeutung für die Praxis, sowie auch den uns zur Verfügung stehenden Raum werden hier ausschließlich die verschiedenen Arten von Lebensv'sgeschäften behandelt werden; auch nur bei ihnen allein kann man, wenn man von den auf ähnlichen Prinzipien beruhenden Unfall-, Kranken- und Invaliditätsv'en absieht, eigentlich von einer V'smathematik sprechen.

Die Bedeutung des Lebensv'sgeschäftes setzen folgende Zahlen in helles Licht: Außer V'seinrichtungen von Berufsvereinigungen, solchen für die Angestellten bestimmter gewerblicher Firmen, Pensions- und Sterbenskassen mit nur lokaler Bedeutung, die auf geringe Summen versichern (beispielsweise zählt Baden allein deren 140), wirkten im Deutschen Reiche im Jahre 1906 26 Aktiengesellschaften und 17 große Gegenseitigkeitsvereine, die allen Kreisen der Bevölkerung für die Lebensv. offenstanden. Bei diesen 43 Anstalten war Ende 1906 ein Kapital von 10 214 397 214 Mk.[1]), also mehr als zehn Milliarden Mk., und eine Jahresrente von 20 592 273 Mk. versichert. Im Jahre 1906 betrugen die Gesamteinnahmen dieser 43 Anstalten 652 643 776 Mk.; diese Summe ist um 88 Millionen Mk.[2]) größer als die Gesamteinnahme des Deutschen Reiches aus Post und

---

[1]) Die angeführten Zahlen sind der vom Kais. Aufsichtsamt für Privatv. herausgegebenen „V'sstatistik für 1906 über die unter Reichsaufsicht stehenden Unternehmungen" (Berlin 1908, S. 18*, 19*, 29*, 32*) entnommen.

[2]) Die Vergleichszahlen stammen aus dem Statistischen Jahrbuch für das Deutsche Reich, herausg. vom Kais. Statistischen Amt, Jahrg. 1908, S. 279 u. 282.

Telegraphie im gleichen Jahre. Mit ihren Aktiven von 3 945 126 000 Mk. hätten diese V'sunternehmungen sogar die Schulden des Deutschen Reiches, die sich 1906 auf 3 663 500 000 Mk. beliefen, tilgen können. Auf den Kopf der deutschen Bevölkerung nach dem Stand vom 1. Dezember 1905 kam eine jährliche Ausgabe von 7,54 Mk. für Lebensv'sprämien[1]).

Dabei ist das solide deutsche Lebensv'sgeschäft noch zwerghaft gegen den Riesenbetrieb Amerikas. Bei den amerikanischen Lebensv'sgesellschaften war Ende 1906 ein Betrag von mehr als 50 Milliarden Mk. versichert, also fünfmal soviel als bei den deutschen Unternehmungen.

In fast allen Kulturstaaten untersteht das V'swesen einer Staatsaufsicht. Diese ist im Deutschen Reiche, dessen Aufsichtsrecht im wesentlichen mit dem der Schweiz und Österreich übereinstimmt, durch das Reichsgesetz über die privaten V'sunternehmungen vom 12. Mai 1901 geregelt.

Vom mathematischen Standpunkte ist besonders der § 11 dieses Gesetzes hervorzuheben; er lautet: „Der Geschäftsplan einer Lebensv'sunternehmung hat die von ihr angenommenen Tarife, sowie die Grundsätze für die Berechnung der Prämien und Prämienreserven vollständig darzustellen, namentlich auch den anzuwendenden Zinsfuß und die Höhe des Zuschlags zur Nettoprämie anzugeben. Auch ist anzugeben, ob und in welchem Maße bei der Berechnung der Prämienreserve eine Methode angewandt werden soll, nach welcher anfänglich nicht die volle Prämienreserve zurückgestellt wird, wobei jedoch der Satz von $12\frac{1}{2}$ per Mille der V'ssumme

[1]) Veröffentlichungen des Kais. Aufsichtsamts f. Privatv. Jahrg. 1908, S. 52.

nicht überschritten werden darf. Die als Grundlage der Berechnungen dienenden Wahrscheinlichkeitstafeln, insbesondere über die Sterblichkeit und die Invaliditäts- und Krankheitsgefahr, sind beizufügen.

„Für jede V'sart (V. auf den Lebensfall — auf den Todesfall, Kapitalv. — Rentenv. usw.) sind die zur Berechnung der Prämien und der Prämienreserven dienenden Formeln vorzulegen und durch ein Zahlenbeispiel zu erläutern.

„Sollen auch V'en mit erhöhter Prämie übernommen werden, so ist in dem Geschäftsplane ferner anzugeben, ob und nach welchen Grundsätzen hierfür eine besondere Prämienreserve gebildet werden soll."

Die Beaufsichtigung aller im Deutschen Reiche wirkenden V'sanstalten, welche V'svereine auf Gegenseitigkeit oder Aktiengesellschaften sein müssen, führt, sofern ihr Geschäftsgebiet nicht nur auf einen einzelnen Bundesstaat beschränkt ist, das Kaiserliche Aufsichtsamt für Privatv. mit dem Sitze in Berlin. Zu seinen Aufgaben gehört nach § 83 des Reichsv'sgesetzes auch die Veröffentlichung[1]) jährlicher Mitteilungen über den Stand der seiner Aufsicht unterworfenen V'sunternehmungen, sowie über seine Wahrnehmungen auf dem Gebiete des V'swesens. Die schweizerische Aufsichtsbehörde ist das Eidgenössische V'samt in Bern. Seit 1886 gibt es alljährlich den wegen seines überaus reichen, populär gehaltenen Inhalts für jeden, der sich für V'swesen interessiert, besonders lehrreichen und wert-

[1]) Das Amt publiziert „Veröffentlichungen des Kais. Aufsichtsamts f. Privatv.", 8. Jahrg. (1909) und eine große Statistik. Diese ist letztmalig unter dem Titel „V'sstatistik für 1906 über die unter Reichsaufsicht stehenden Unternehmungen", Berlin 1908, erschienen. Eine Vereinigung der bisher publizierten Jahresstatistiken liegt vor in: „Die Entwicklung des privaten V'swesens unter Reichsaufsicht in dem Jahrfünft 1902—1906." Herausg. vom Kais. Aufsichtsamt f. Privatv. Berlin 1909.

vollen „Bericht des Eidgenössischen V'samtes über die privaten V'sunternehmungen in der Schweiz" heraus. In Österreich unterstehen die privaten V'sunternehmungen dem K. K. Ministerium des Innern[1]).

Am 1. Januar 1910 wird im Deutschen Reich das Reichsgesetz vom 30. Mai 1908 über den V'svertrag[2]) in Kraft treten. Dieses ordnet die privatrechtliche Seite des V'swesens. Für den Mathematiker sind besonders die Vorschriften der §§ 173—178 über vorzeitige Auflösung des Vertrages und ihre Folgen, also die Frage des Rückkaufes und der Umwandlung der V., von Wichtigkeit. Die infolge des neuen Gesetzes notwendig werdende Revision der V'sbedingungen hat den Verband deutscher Lebensv'sgesellschaften veranlaßt, Normativbestimmungen für die Todesfallv. zu entwerfen. Diese sind bereits vom Kais. Aufsichtsamt[3]) genehmigt worden und werden von den 36 deutschen Anstalten, die dem Verbande angehören, mit geringen jeweiligen Abänderungen eingeführt werden. Gleichzeitig mit dem deutschen Gesetz tritt in der Schweiz das Bundesgesetz über den V'svertrag vom 2. April 1908 in Kraft[4]).

Über das Verhältnis des V'swesens zur Wissenschaft mögen noch die folgenden Angaben dienen: Schon im Jahre 1848 wurde von den englischen V'smathematikern, „Aktuaren", das Institute of actuaries begründet;

[1]) Die letzte Publikation der österreichischen Aufsichtsbehörde führt den Titel „Die privaten V'sunternehmungen in den im Reichsrate vertretenen Königreichen und Ländern im Jahre 1905". Amtliche Publikation des K. K. Ministeriums des Innern.

[2]) Von der Literatur über das Gesetz sei nur erwähnt: Gerhardt, Hagen, v. Knebel-Doeberitz. Bröcker und Manes, Kommentar zum deutschen Reichsgesetz über den V'svertrag. Berlin 1908.

[3]) Veröffentlichungen des Kais. Aufsichtsamts f. Privatv., Jahrg. 1909, S. 92.

[4]) Abdruck des Gesetzes und Interpretationen zu demselben findet man im Bericht des Eidgenöss. V'samtes über das Jahr 1907.

sein Zweck ist die wissenschaftliche Pflege der Lebensv'smathematik. Sein seit 1850 erscheinendes Journal, sein in zweiter Auflage vorliegendes Textbook (siehe Literatur), an das die internationale Nomenklatur für die Formeln anknüpft, die seiner Anregung zu verdankenden Sterblichkeitstafeln aus den Erfahrungen von 20 englischen Lebensv'sgesellschaften (1869) — 1843 war schon in England eine Sterblichkeitstafel auf Grund der Erfahrungen von 17 englischen Lebensv'sgesellschaften erschienen — sind in V'skreisen berühmt. In jüngster Zeit verdankt man dem Institute das große, epochemachende achtbändige Werk, das die Sterblichkeitserfahrungen von 60 britischen Gesellschaften auf dem Gebiete der Todesfallv. und 43 auf dem der Rentenv. in den Jahren 1863—1893 bearbeitet. Das reiche Material wird nach dem Geschlecht, der V'sform, der Gewinnbeteiligung und der V'sdauer getrennt; hergeleitet wird — neben gewöhnlichen Tafeln — ein System von sogenannten „Selektionssterbetafeln" (vgl. Kap. IX)[1]). Eine derartige mit der Praxis in Zusammenhang stehende Akademie für Forschung und Lehre hat Deutschland nicht. 1899 konstituierte sich der Deutsche Verein für V'swissenschaft, der „die rechts- und wirtschaftswissenschaftlichen, wie die mathematischen und naturwissenschaftlichen Wissenszweige, deren Bestand und Fortbildung dem V'swesen dienlich sind", fördern will. Seit 1901 veröffentlicht dieser Verein vierteljährlich die „Zeitschrift für die gesamte V'swissenschaft", außerdem in zwangloser Reihenfolge „Veröffentlichungen des Vereins für V'swissenschaft". Im Herbst 1906 tagte

[1]) Der Titel ist „Institute of actuaries and faculty of actuaries joint mortality investigation" (4 Bände); hieran anschließend: British offices life tables 1893 (4 Bände). Abgeschlossen London 1903. Eingehende Besprechung bei Czuber, Zeitschrift f. d. ges. V'swissenschaft, Bd. 5, 315 (1905) und im Berichte des Eidgenössischen V'samtes über das Jahr 1903, S. XII

in Berlin der fünfte internationale Kongreß für V'swissenschaft, der aus den internationalen Aktuarkongressen hervorging. Der letzte, sechste internationale Kongreß für V'swissenschaft fand 1909 in Wien statt.

Der deutsche Verein für V'swissenschaft hatte übrigens in gewisser Beziehung schon einen Vorgänger in dem von dem bekannten V'smathematiker Dr. Zillmer im Jahre 1868 begründeten „Kollegium für Lebensv'swissenschaft zu Berlin". Als seine wichtigste Aufgabe sah dasselbe die Herstellung von Sterblichkeitstafeln aus den eigenen Erfahrungen der deutschen Lebensv'sunternehmungen an; bis dahin wurden fast ausnahmslos englische Tafelwerke benützt. Nachdem das geplante bedeutsame Werk 1883 mit einem Kostenaufwande von über 54 000 Mk., von den Druckkosten abgesehen, unter dem Titel „Deutsche Sterblichkeitstafeln aus den Erfahrungen von dreiundzwanzig Lebensv'sgesellschaften, veröffentlicht im Auftrage des Kollegiums für Lebensv'swissenschaft zu Berlin" erscheinen konnte, hörte das Kollegium zu bestehen auf. Das angeführte Werk, welches wir, wie üblich, als 23 **D. G.** (23 deutsche Gesellschaften) zitieren werden, enthält zuerst den von W. Lazarus verfaßten Arbeitsplan mit einer ausgezeichneten Auseinandersetzung über die Methode der Abfassung von Sterblichkeitstafeln aus den Erfahrungen von Lebensv'sgesellschaften; hierauf folgt die Verarbeitung des Materials für die im Werke abgedruckten Sterblichkeitstafeln, zum Schluß die von Dr. Zillmer berechneten ausgeglichenen Tabellen, von denen für die Praxis besonders wichtig sind:

M u. W I., hergestellt aus den gemeinsamen Beobachtungen an 341 744 Männern und 121 606 Frauen,

die normal nach vollständiger ärztlicher Untersuchung versichert waren;

M u. W II., hergestellt aus gemeinsamen Beobachtungen an 90 311 Männern und 30 938 Frauen, die nach vollständiger ärztlicher Untersuchung erhöht versichert waren;

M u. W III., hergestellt aus gemeinsamen Beobachtungen an 114 894 Männern und 122 558 Frauen, die nach unvollständiger ärztlicher Untersuchung versichert waren.

Die Tafel 23 D. G. M u. W I. kommt bei etwa 75 % der deutschen großen Lebensv'sanstalten (ca. 30) und bei 4 schweizerischen Gesellschaften zur Prämienbestimmung der auf Grund ärztlicher Prüfung versicherten Personen mit guter Gesundheit in Anwendung[1]). Auf Grund der Tafel 23 D. G. M u. W II. als Rechnungsgrundlage hat erst 1907 eine deutsche Lebensv'sgesellschaft die Todesfallv. ohne ärztliche Untersuchung eingeführt[2]); die Tafel 23 D. G. M u. W III. wird für Volks- und Sterbekassenv. verwendet.

Obgleich die Tafeln 23 D. G. infolge der Minderung der Sterblichkeit als veraltet gelten müssen, ist seit ihrer Herstellung keine von den deutschen V'sgesellschaften gemeinsam ausgeführte große Sterblichkeitsuntersuchung an versicherten Personen durchgeführt worden. Eine solche ist gegenwärtig im Gange. Hiermit folgt man in Deutschland dem von der mathematisch-statistischen Vereinigung des österreichisch-ungarischen Verbandes der Privatv'sanstalten gegebenen Beispiel.

[1]) Angaben über die Rechnungsgrundlagen der Lebensv'sgesellschaften, die im Deutschen Reiche tätig sind, findet man in C. Neumanns „Jahrbuch für das V'swesen im Deutschen Reiche", für die in der Schweiz tätigen Gesellschaften im Berichte des Eidgenöss. V'samtes.

[2]) Vgl. Veröffentlichungen des Kais. Aufsichtsamts f. Privatv. Jahrg. 1907, S. 79.

Zur Herstellung der „Absterbeordnung aus Beobachtungen an österreichischen Versicherten“[1]) hatten 28 Gesellschaften ihre Erfahrungen an in den Jahren 1875 bis 1900 in Österreich abgeschlossenen V'en beigesteuert. Diesem großen Werk eigentümlich ist die Zählung einerseits nach „Selektionen“, andererseits nach „Personen“. Bei der Selektionszählung wurde jede versicherte Person so häufig gezählt, als sie infolge wiederholter V'en ärztlich untersucht worden war.

Die neuen deutschen Tafeln, die der Verein deutscher Lebensv'sgesellschaften herausgeben will, werden, wie geplant ist, die Ergebnisse von 51 V'sgesellschaften umfassen, nämlich aller deutschen mit Ausnahme von zwei kleinen, fast aller österreichischen, zweier schweizerischer und einer holländischen; sie werden nicht nur die reine Sterblichkeit beobachten, sondern auch Beruf und körperliche Anomalie ins Auge fassen. Die Kosten sind mit $^1/_4$ Million Mk. veranschlagt[2]).

I. Kapitel.

Zins.

Im Geschäftsbetrieb der V'sunternehmungen ist die Verwaltung der Geldmittel von größter Bedeutung. Wir müssen uns daher mit der Verzinsung von Geld beschäftigen.

Für die leihweise Überlassung von Geld ist es üblich, dem Verleiher eine Entschädigung, Zins genannt, zu zahlen. Als Gründe für diesen von Aristoteles damit be-

[1]) Das Werk ist unter diesem Titel vierbändig in Wien 1907 erschienen.

[2]) Vgl. Zeitschr. f. d. ges. V'swissenschaft, Bd. 8 (1908), S. 753. Wallmanns V'szeitschrift (1909), S. 1041 u. 1551.

kämpften Gebrauch, daß das Geld von Natur aus unfruchtbar und daher nicht zur Erzeugung von Geld geeignet sei, kann man angeben, daß der Entleiher das Geld produktiv verwerten kann, der Kapitalist das Geld während der Leihzeit entbehrt, und daß in dem Zins eine Entschädigung für früher geübte Enthaltsamkeit liegt.

Die Höhe des Zinses gibt man im kaufmännischen Leben in % (Prozenten) an. Eine Summe ist zu π% ausgeliehen, bedeutet: für 100 Mk. sind am Schlusse des Jahres π Mk. an Leihgebühren zu zahlen. Für die folgenden Rechnungen soll ausnahmslos der wirkliche Zinsfuß, d. h. diejenige Summe, welche zu Ende des Jahres als Leihgebühren für das Kapital 1 (die Geldeinheit) zu zahlen ist, verwendet werden. Der wirkliche Zinsfuß soll
(I) ausnahmslos mit i bezeichnet werden (I). Es ist also $i = \frac{\pi}{100}$; das Kapital ist zu $100\,i$% ausgeliehen. Steht das Kapital zu 3%, bzw. $3\frac{1}{2}$%, 4%, so ist $i = 0{,}03$ bzw. 0,035, 0,04.

Die Bildung des Zinsfußes hängt wie jede Preisbildung überhaupt von Nachfrage und Angebot ab. Der große Mathematiker C. F. Gauß (1777—1855) in Göttingen, welcher die dortige Professorenwitwenkasse in mustergültiger Weise neuordnete, berichtet in seinem Gutachten, daß die Kasse 1794 Gelder sicher nur zu 3% unterbringen zu können rechnete; 1799 hob sich der Zinsfuß auf 4%, etwas später auf 5% (Gauß, Ges. Werke, IV, 148). 1845 war der Zinsfuß für die Gelder der Kasse niedriger als 4% (ebenda S. 158). Die zukünftige Höhe des Zinsfußes ist uns unbekannt. Wie die Erfahrung gelehrt hat, folgte dem Fallen des Zinsfußes häufig ein Steigen, wenn durch neue Bedürfnisse frische

Geldmittel erforderlich wurden. Ob die von Gauß zitierte Ansicht des badischen Finanzministers Nebenius: „Einer Periode größerer Regsamkeit in produktiven Unternehmungen, die das Sinken des Zinsfußes eine Zeitlang aufhält, folgt um so gewisser rasches Sinken des Zinsfußes“, richtig ist, ist fraglich.

Bei den V'sanstalten ist zwischen zwei Arten von Zins, dem rechnungsmäßigen und dem wirklich erzielten, zu unterscheiden. Unter dem rechnungsmäßigen Zins versteht man denjenigen, den die V'sunternehmungen ihren Berechnungen zugrunde legen, unter dem wirklich erzielten denjenigen, zu dem die V'sunternehmungen tatsächlich ihr Geld im Durchschnitt zinstragend angelegt haben. Infolge unserer Unkenntnis des Zinsfußes, den die V'sanstalt künftig erzielt, wird man daher, wie es Gauß a. a. O. S. 158 ausdrückt, verlangen müssen, „daß jede vom Zinsfuß wesentlich abhängige Anstalt, wenn sie nicht für eine durchaus unsichere gelten soll, nicht auf dem augenblicklich bestehenden, sondern auf einem etwas niedrigeren Zinsfuß basiert werden muß“. Die Rechnungsgrundlagen für das Lebensv'sgeschäft sind daher unter Zugrundelegung eines Zinsfußes zu wählen, der unbeschadet einer soliden Anlage des Geldes nach unserem heutigen Wissen voraussichtlich sicher nicht nur zurzeit, sondern auch eine längere Reihe von Jahren bis zum Ablaufe der betr. V'sverträge erzielt werden wird. Die deutschen Lebensv'sanstalten legen ihren Rechnungen schon seit einer Reihe von Jahren einen $3^1/_2$% nicht übersteigenden Zinsfuß zugrunde; sie verwenden 3%, $3^1/_4$% oder $3^1/_2$% als rechnungsmäßigen Zinsfuß.

Bei ausländischen im Deutschen Reich tätigen V'sgesellschaften, die bei Inkrafttreten der reichsgesetzlichen Beauf-

sichtigung im Jahre 1902 noch mit einem höheren Zinsfuß als $3^1/_2\%$ rechneten, verlangte das Kais. Aufsichtsamt für Privatv. die Einführung eines solchen mit der Motivierung, daß „nur bei einem $3^1/_2\%$ nicht übersteigenden rechnungsmäßigen Zinsfuß mit Wahrscheinlichkeit darauf gerechnet werden könne, daß der tatsächlich erreichte Zinsfuß nicht unter den rechnungsmäßigen sinke“[1]). Der wirklich erzielte durchschnittliche Zinsfuß für die Kapitalanlagen betrug im Jahre 1906 bei 33 deutschen Lebensv'sanstalten 3,91 als Minimum und 4,73 als Maximum[2]).

Wenn der rechnungsmäßige Zinsfuß auch im Einklang mit den zurzeit herrschenden Anschauungen nach bestem Wissen gewählt war, so wird doch bei Änderung des wirklich erzielten Zinses eine technische Revision nötig, und es sind daher die rechnungsmäßigen Grundlagen von Zeit zu Zeit dahin zu prüfen, ob sie mit Rücksicht auf den veränderten wirklich erzielten Zinsfuß noch beibehalten werden können. In den Jahren 1886 bis 1892 mußten von 25 in der Schweiz konzessionierten Lebensv'sanstalten 21 zu einem niedrigeren Zinsfuße für die Berechnung ihrer Prämien und Deckungskapitalien übergehen[3]).

Ist ein Kapital S zum wirklichen Zinsfuß i auf ein Jahr ausgeliehen, so bringt es, da die Einheit i an Zinsen trägt, $S \cdot i$ an Zinsen und ist mit seinen Zinsen zu der Summe:

$$S_1 = S + S \cdot i = S(1 + i) \qquad (1)$$

angewachsen. Leiht man die so gewonnene Summe S_1 nochmals auf ein Jahr zum wirklichen Zinsfuß i aus, so wächst sie mit ihren Zinsen zu:

---

[1]) Veröffentlichungen des Kais. Aufsichtsamts f. Privatv., Bd. 3, 110 (1904).

[2]) Versicherungsstatistik f. 1906 über die unter Reichsaufsicht stehenden Unternehmungen (Kais. Aufsichtsamt f. Privatv.). Berlin 1908. Tab. I, 43.

[3]) Ber. d. Eidgenöss. V'samtes über das Jahr 1892, S. V und VII.

$$S_2 = S_1 (1 + i) = S (1 + i) (1 + i) = S (1 + i)^2$$

an. Fährt man so fort, so findet man:

Ein Kapital S ist am Schlusse von n Jahren, wenn es zu $100\,i\,\%$ oder zum wirklichen Zinsfuße i ausgeliehen war und auch der Zins jedes Jahr zu demselben Zinsfuße verzinslich angelegt war, durch Zinseszins zu:

$$S_n = S (1 + i)^n \tag{2}$$

angewachsen. Man nennt S_n das nach n Jahren aus S entstehende Endkapital. Die Größe $1 + i$ wird als Aufzinsungsfaktor bezeichnet. Setzt man in der Formel (1) für $S = 1$, so ergibt sich: Der Aufzinsungsfaktor ist diejenige Summe, zu der die Einheit nach Verlauf eines Jahres angewachsen ist.

Durch Formel (2) läßt sich das ursprüngliche Grundkapital oder, wie man sagt, der Barwert oder der Kapitalwert S aus der Summe S_n finden, zu welcher der Barwert S nach n Jahren mit Zins und Zinseszins angewachsen ist. Aus (2) folgt:

$$S = \frac{S_n}{(1 + i)^n}\,. \tag{3}$$

Wir setzen $\frac{1}{1 + i} = v$ (II). Man nennt v den Dis- (II)

kontierungs- oder Abzinsungsfaktor. Setzt man in (3) für $n = 1$, $S_1 = 1$, so sieht man, v ist der Barwert derjenigen Summe, die in einem Jahre mit ihren Zinsen zur Einheit anwächst. Unter Benützung von (II) wird die Formel (3):

$$S = S_n v^n\,. \tag{4}$$

Wir haben also den Satz: Beträgt ein Kapital nach n Jahren mit Zins und Zinseszins S_n, so

findet man seinen Barwert, indem man S_n mit der $n$ten Potenz des Diskontierungsfaktors v multipliziert.

Bei 3 % Zinsen ist $i = 0{,}03$, $v = \frac{1}{1{,}03}$,

bei $3^1/_2$ % ist $i = 0{,}035$, $v = \frac{1}{1{,}035}$.

Es gibt Hilfstafeln[1]), welche die Potenzen von v für die verschiedenen in praxi vorkommenden Werte des v angeben. Einer solchen Tafel entnehme ich $\frac{1}{1{,}035^{50}} = 0{,}1790534$. Um in 50 Jahren 100 000 Mk. zu haben, muß man also 17905,34 Mk. zu $3^1/_2$% auf Zinseszins anlegen.

Ist $\frac{m_1}{m_2}$ ein positiver echter Bruch und n eine ganze positive Zahl, so liegt die verallgemeinerte Potenz $(1+i)^{n+\frac{m_1}{m_2}}$ zwischen $(1+i)^n$ und $(1+i)^{n+1}$. Mithin besteht die Ungleichung $S(1+i)^n < S(1+i)^{n+\frac{m_1}{m_2}} < S(1+i)^{n+1}$. Man dehnt daher die nur für ganzzahliges n definierte Formel (2) auch auf nicht ganzzahlige Werte des Exponenten aus und kommt überein, daß bei den Berechnungen, die man anstellt, die Summe $S(1+i)^{n+\frac{m_1}{m_2}}$ als Endkapital einer Summe S, die $n + \frac{m_1}{m_2}$ Jahre auf Zinseszinsen ausgeliehen war, angesehen werden soll. Mithin ist auch die Formel (4), die ursprünglich nur für ganzzahliges n galt, für nicht ganzzahlige Werte von n zu verwenden.

Beispielsweise ist eine Summe von 1000 Mk. aus einem Kapital entstanden, dessen Wert vor $5^1/_2$ Jahren mit

---

[1]) Z. B. H. Murai, Zinseszinsen-, Einlage-, Renten- und Amortisations-Tabellen. Budapest. S. Spitzer, Tabellen für die Zinseszinsen- und Rentenrechnung. Wien.

$$\frac{1000}{1{,}035^{5\frac{1}{2}}} = \frac{1000}{1{,}035^5 \cdot \sqrt{1{,}035}} = \frac{1000}{1{,}035^5 \cdot 1{,}01735} = 827{,}61 \text{ Mk.}$$

zu veranschlagen ist, wenn ein Zins von $3^1/_2\%$ zugrunde gelegt wird.

II. Kapitel.

Sterblichkeitstafeln.

§ 1. Wesen und Herstellung der Sterblichkeitstafeln.

Für den technischen Aufbau jeder Lebensv. ist eine Sterblichkeitstafel notwendig. Die einfachste Form, die man der Sterblichkeitstafel geben kann, ist die Absterbeordnung; hierunter versteht man eine tabellarische Übersicht, die darüber Aufschluß erteilt, wieviel Personen aus einer bestimmten großen (willkürlich gewählten) Grundmasse Gleichaltriger noch das nächste, übernächste Lebensjahr usw. erleben; sie berichtet, in welcher Weise eine Anzahl gleichaltriger Personen von Jahr zu Jahr abstirbt. Man sollte statt von einer Absterbeordnung eigentlich euphemistisch und auch treffender von einer Tafel der Überlebenden sprechen.

Der große französische Mathematiker Laplace (1749 bis 1827) sagt in seinem Essai philosophique sur les probabilités (1814): „Die Herstellung einer Sterblichkeitstafel ist sehr einfach. Man entnimmt den Geburts- und Todesregistern eine große Anzahl von Kindern, verfolgt sie während ihres ganzen Lebenslaufes, indem man bestimmt, wie viele von ihnen am Ende eines jeden Jahres noch leben, und schreibt die so gewonnene Zahl immer neben das zugehörige Jahr." Nach der erwähnten Methode hat man eine gewisse große, wirklich existierende Grundmasse l_0 Neugeborener von der Wiege bis

zum Grabe zu beobachten und die Reihe von Zahlen:

(III) $$l_1,\ l_2,\ l_3,\ \ldots \qquad \text{(III)}$$

zu notieren, welche die Anzahl von Individuen angeben, die von den Nulljährigen ihren ersten, zweiten, dritten usw. Geburtstag feiern. Für die Konstruktion einer Absterbeordnung nach dieser direkten Methode sind zwei Möglichkeiten vorhanden: entweder man verfolgt genaue Zivilstandregister eines verflossenen Jahrhunderts oder man ist erst 100 Jahre nach Anlegung der Tafel imstande, sie zu vollenden. Sieht man selbst von der ungemein schweren Durchführbarkeit dieser direkten Methode ab, so gibt sie wegen der großen Wanderungen im Verlauf von 100 Jahren, die sie nicht berücksichtigen kann, auch kein richtiges Bild von der Sterblichkeit höherer Altersklassen. Empfehlenswert ist diese direkte Methode, um Bruchstücke einer Absterbeordnung, wie z. B. für die ersten 25 Lebensjahre (Sterblichkeitstafeln für Kinderausstattungen), zu erhalten.

Wenn irgendeine Absterbeordnung vorliegt, soll im folgenden stets mit l_x die Anzahl von Personen, die aus der anfänglichen Grundmasse ihren $x$ten Geburtstag
(IV) erlebt haben, bezeichnet werden; man sagt auch, l_x (IV) ist die *Anzahl der Lebenden des Alters* x. Die Zahl l_{x+1} gibt also an, von den l_x Personen des Alters x erleben noch l_{x+1} den $(x+1)$ten Geburtstag. Die Zahlen $l_x,\ l_{x+1},\ \ldots$ sind der Natur der Sache nach eine Reihe positiver Zahlen, von denen keine folgende
(V) größer als eine voraufgehende sein kann. Ist ω (V) die höchste Anzahl von Jahren, welche von Personen der beobachteten Grundmasse völlig durchlebt werden, so ist $l_{\omega+1}=0$. Bildet man für jeden möglichen Wert des x die Differenz $l_x - l_{x+1}$, die wir ausnahmslos

mit d_x bezeichnen, $d_x = l_x - l_{x+1}$ (VI), so hat man (VI)
in d_x die Anzahl derjenigen Personen, die im Alter von x bis $x+1$ Jahren verstorben sind. Die Zahlen d_x heißen die Toten der Sterbetafel.

Es ist offenbar $$d_\omega = l_\omega \qquad (5)$$
und $$d_x + d_{x+1} + d_{x+2} + \ldots + d_\omega = l_x\,. \qquad (6)$$

Es verdient noch hervorgehoben zu werden, daß nicht jede Absterbeordnung notwendig mit dem Alter 0 anfangen muß. Die am Schlusse abgedruckte Tafel 23 D. G. M u. W I fängt mit dem Alter 17 an; es ist nach ihr $l_{17} = 102\,787$, von den 17jährigen 102 787 Personen erlebten $l_{18} = 101\,878$ den 18. Geburtstag; es starben daher im Alter von 17 bis 18 Jahren $d_{17} = 909$. Für die angegebene Tafel ist $\omega = 89$.

Eine vollständige Sterblichkeitstafel enthält nicht nur eine Absterbeordnung und die Toten, sondern sie verzeichnet auch für jedes Alter den Quotienten $\frac{d_x}{l_x}$, den wir ausnahmslos mit q_x bezeichnen. Man nennt
$q_x = \frac{d_x}{l_x}$ (VII) die Sterbenswahrscheinlichkeit des (VII)
$x$jährigen. Der Name stammt aus der mathematischen Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Läßt sich das Eintreten eines Ereignisses auf gewisse, streng voneinander unterscheidbare „Fälle“ zurückführen, die als „gleichmöglich“, „gleichberechtigt“ oder „gleichwertig“ angesehen werden dürfen, und haben von diesen Fällen die einen den Eintritt des erwarteten Ereignisses zur Folge (günstige Fälle), vereiteln die andern das Eintreffen des Ereignisses (ungünstige Fälle), so versteht man unter der mathematischen Wahrscheinlichkeit des Ereignisses den Bruch, der die Anzahl der

günstigen Fälle zum Zähler, die Anzahl aller gleichmöglichen Fälle zum Nenner hat. Die mathematische Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer roten Kugel aus einer Urne mit r roten und s schwarzen Kugeln ist $\frac{r}{r+s}$; denn von den $r+s$ gleichmöglichen Fällen sind für das Ziehen einer roten Kugel r günstig. Damit $\frac{r}{r+s}$ tatsächlich die begründete Erwartung für das Ziehen einer roten Kugel sein soll, müssen, was hervorgehoben zu werden verdient, die $r+s$ Möglichkeiten wirklich gleichberechtigt sein, d. h. es dürfen weder für das Ziehen einer roten, noch einer schwarzen Kugel irgendwelche begünstigende Umstände vorhanden, z. B. die Kugeln nicht etwa in der Urne ungleichmäßig vermischt sein.

Die Sterbenswahrscheinlichkeit $q_x = \frac{d_x}{l_x}$ ist ein Zahlenverhältnis, das die Form einer mathematischen Wahrscheinlichkeit besitzt. Von einer solchen unterscheidet es sich aber schon dadurch, daß die im Nenner auftretenden Individuen l_x nicht gleichberechtigt wie die Kugeln bei dem Zufallsspiele des Ziehens aus einer Urne sind; denn die Lebenslänge ist doch durchaus individuell verschieden und bei jeder einzelnen Person eine Folge ihrer Körperkonstitution, ihrer Gesundheitsverhältnisse, ihrer erblichen Anlagen, ihrer Ernährung, ihrer Lebensweise, ihres Berufes usw. Die Sterbenswahrscheinlichkeit $q_x = \frac{d_x}{l_x}$ ist uns zunächst und vor allem eine sogenannte statistische Wahrscheinlichkeit. Hierunter versteht man ein durch Beobachtung gewonnenes Zahlenverhältnis, das auf folgende Weise entsteht: s ist eine

genügend große Zahl Einzelbeobachtungen, von denen jede ein besonderes Resultat hätte ergeben können, m bezeichnet die Anzahl der Fälle, in denen dieses wirklich eingetreten ist, der Quotient $\frac{m}{s}$ ist die statistische Wahrscheinlichkeit. Die Größe q_x ist der numerische Ausdruck für das raschere oder langsamere Sterben, das in der Gruppe der beobachteten $x$jährigen im Laufe eines Jahres herrschte. Der Sterbenswahrscheinlichkeit q_x kann man auch, indem man sie mit 100 bzw. 1000 multipliziert, die Bedeutung eines Prozent- oder Promillesatzes beilegen. Die Zahl $100\,q_x$ bzw. $1000\,q_x$ gibt an, wieviel von je 100 bzw. 1000 $x$jährigen Individuen nach der vorliegenden Sterbetafel durchschnittlich im Alter von x bis $x+1$ Jahren verstarben. Die Reihe q_x der Sterbenswahrscheinlichkeiten liefert eine Umwandlung der Absterbeordnung, die von der Ausdehnung des Beobachtungsmaterials losgelöst ist.

Ebenso wie man die Sterbenswahrscheinlichkeit q_x des Alters von x Jahren einführt, verwendet man auch die Lebenswahrscheinlichkeit des $x$jährigen, die man mit p_x bezeichnet. Von l_x Personen des Alters von x Jahren erlebten nach unserer Sterblichkeitstafel noch l_{x+1} ihren $(x+1)$ten Geburtstag. Für die Lebenswahrscheinlichkeit des $x$jährigen, die man mit p_x bezeichnet, findet man $p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$ (VIII). Mit 100 multipliziert, hat sie die Bedeutung: von 100 $x$jährigen Personen erlebten nach der vorliegenden Sterbetafel durchschnittlich $100\,p_x$ den $(x+1)$ten Geburtstag. (VIII)

Es ist

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = 1 - p_x\,. \qquad (7)$$

Hat man die Werte des q_x, so ist nach (7) p_x zu finden und umgekehrt. Je größer die Lebenswahrscheinlichkeit des Alters x, desto geringer seine Sterbenswahrscheinlichkeit!

Man kann auch die Wahrscheinlichkeit, daß eine $x$jährige Person noch nach n Jahren lebt oder ihren $x+n$ten Geburtstag feiert, einführen; sie ist $\frac{l_{x+n}}{l_x}$.

(IX) Man setzt ${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$ (IX). Die Wahrscheinlichkeit für den $x$jährigen, im Laufe der nächsten n Jahre zu sterben, ist $\frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = 1 - {}_np_x$; denn von l_x Personen erleben nur l_{x+n} den $x+n$ten Geburtstag, also sterben $l_x - l_{x+n}$. Die Wahrscheinlichkeit für eine $x$jährige Person, im Alter von $x+n$ bis $x+n+1$ Jahren zu sterben, ist $\frac{d_{x+n}}{l_x}$; denn von l_x Personen starben d_{x+n} im Alter von $x+n$ bis $x+n+1$ Jahren.

Man setzt $\frac{d_{x+n}}{l_x} = {}_{n|}q_x$.

Viele Sterbetafeln verzeichnen auch die fernere mittlere Lebensdauer $\overset{0}{e}_x$ oder Lebenserwartung des $x$jährigen. Sie ist definiert durch

$$\overset{0}{e}_x = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots + l_\omega}{l_x} + \frac{1}{2}$$

und bestimmt die von einem $x$jährigen durchschnittlich durchlebte Anzahl von Jahren. Zu dieser Größe gelangt man auf folgende Art: Wären bei den beobachteten l_x Personen der Absterbeordnung alle Todesfälle immer erst am Schluß des Jahres eingetreten, so hätten sämtliche l_x Personen des Alters x das $(x+1)$te Lebensjahr durchlebt, ebenso hätten die l_{x+1} Personen von ihnen, die nach der Absterbeordnung den $(x+1)$ten Geburtstag begehen, das $(x+2)$te Lebens-

jahr durchlebt usw. Mithin hätten alle l_x Personen gemeinsam $l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots + l_\omega$ Jahre durchlebt; auf den einzelnen entfällt der $l_x$te Teil. Da die Todesfälle durchschnittlich in der Mitte des Jahres eintreten, subtrahiert man von dem Quotienten $\frac{l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots + l_\omega}{l_x}$ noch $\frac{1}{2}$; alsdann hat man $\overset{0}{e}_x$.

Wir knüpfen unsere weiteren Betrachtungen an die Sterbenswahrscheinlichkeit q_x. Wir werden sehen, daß je nach dem Zweck, welchem die Sterblichkeitstafel dienen soll, zur Bestimmung des q_x verschiedenes, in gewisser Gleichartigkeit ausgewähltes Menschenmaterial verwendet wird. Angenommen, aus einem einheitlichen Material seien für die Altersklassen der i, $i+1$, $i+2$, $\ldots$ i'-jährigen auf irgendwelche Art und Weise die Sterbenswahrscheinlichkeiten q_i, q_{i+1}, q_{i+2}, $\ldots$ $q_{i'}$ durch Beobachtung gewonnen; in diesen beobachteten Werten für q_x sehen wir jetzt ein zweckmäßiges Kriterium für die physische Möglichkeit des Sterbens im Laufe des nächsten Lebensjahres und postulieren für diese Größen eine dauernde Gültigkeit über den Personenkreis hinaus, aus dem sie durch Beobachtung hergeleitet werden. Wir nehmen also an, daß große gleichaltrige Personengruppen, die unter ähnlichen Bedingungen leben, dem Tode im nächsten Lebensjahre immer annähernd gleichartig verfallen. Über die Berechtigung der Annahme einer solchen Konstanz werden wir noch im § 4 sprechen.

A_i bedeute eine willkürlich gewählte ganze positive Zahl. Wir betrachten eine fingierte Grundmasse von $i$jährigen Personen $l_i = A_i$. Infolge unseres Postulats ist diese willkürlich gewählte Anzahl $l_i = A_i$ Personen im Laufe ihres nächsten Lebensjahres derselben Sterbegefahr ausgesetzt, wie sie die Größe q_i für diejenigen

$i$jährigen Personen, aus deren Beobachtung sie gewonnen wurde, verzeichnet. Da unter 100 beobachteten $i$jährigen Personen durchschnittlich $100\, q_i$ im Alter von i bis $i+1$ Jahren sterben, so werden für die fiktive Grundmasse von l_i Personen $l_i\, q_i$ Todesfälle anzunehmen sein und mithin $l_i - l_i\, q_i = l_i\,(1-q_i)$ ihrer Angehörigen das $(i+1)$te Lebensjahr vollenden. Bezeichnet man die $(i+1)$jährigen nach der internationalen Bezeichnungsweise mit l_{i+1}, so hat man die Gleichung

$$l_{i+1} = l_i(1-q_i)\,. \tag{8}$$

Da diese l_{i+1} Personen nach unserem Postulat im Verlauf ihres $(i+1)$ten bis $(i+2)$ten Lebensjahres derselben Sterbensgefahr ausgesetzt sind, wie sie q_{i+1} verzeichnet, so erleben von den l_{i+1} Personen $l_{i+1} - l_{i+1}\, q_{i+1} = l_{i+1}(1-q_{i+1})$ den $(i+2)$ten Geburtstag. Diese Zahl ist mit l_{i+2} zu bezeichnen; daher wird $l_{i+2} = l_{i+1}(1-q_{i+1})$ und mit Rücksicht auf (8):

$$l_{i+2} = l_i(1-q_i)(1-q_{i+1})\,.$$

Fährt man so fort, so hat man:

$$l_{i'+1} = l_i\,(1-q_i)(1-q_{i+1})(1-q_{i+2})\,\ldots\,(1-q_{i'})\,.$$

Setzt man $l_i = A_i$ (für A_i wählt man gewöhnlich eine runde Zahl, etwa 100 000) und nimmt $i = 0$, so hat man in:

$$A_0,\; A_0\,(1-q_0),\; A_0\,(1-q_0)\,(1-q_1),$$
$$A_0\,(1-q_0)\,(1-q_1)\,(1-q_2),$$
$$A_0\,(1-q_0)\,(1-q_1)\,(1-q_2)\,(1-q_3),\;\ldots$$

eine vollständige Absterbeordnung gewonnen.

Die angewendete Methode ist eine indirekte. Der Grundstock A_0 ist eine willkürlich angenommene, ideelle Grundmasse Nulljähriger; aus ihr werden die Überlebenden mittels der für die einzelnen Altersklassen

beobachteten Sterbenswahrscheinlichkeiten rechnerisch hergeleitet. Dieses indirekte Verfahren ist heute zur Herstellung von Sterbetafeln allein gebräuchlich. Von der Berechnung der Sterbenswahrscheinlichkeiten, deren Kenntnis diese Methode erfordert, soll der nächste Paragraph handeln.

§ 2. Berechnung der Sterbenswahrscheinlichkeit.

Zur Bestimmung der Sterbenswahrscheinlichkeit q_x hatten wir die Gleichung:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}\,. \tag{VII}$$

Damit wir in q_x ein von der Individualität der einzelnen Personen des Alters x nahezu unabhängiges Resultat erhalten, q_x also gewissermaßen die Sterbenswahrscheinlichkeit der Altersklasse der $x$jährigen ist, muß q_x auf Grund der Beobachtung einer sehr großen Anzahl l_x von Individuen gewonnen werden. Jede dieser l_x Personen ist von ihrem $x$ten Geburtstage an ein Jahr unter Beobachtung zu halten; hierdurch bestimmt man die von den l_x Personen im Alter von x bis $x+1$ Jahren verstorbenen d_x Personen und findet dann q_x.

Gewöhnlich wird es nicht möglich sein, jede Person einer großen Anzahl ein Jahr lang im Auge zu behalten; an Stelle der „geschlossenen" Gesellschaft wird man eine „offene" haben, d. h. innerhalb der Beobachtungszeit werden gewisse der anfänglich vorhandenen Individuen dem Gesichtskreise des Beobachters entschwinden, andere werden hinzutreten. Bezeichnen wir mit A_x die an ihrem $x$ten Geburtstage unter Beobachtung tretenden Personen. Zu diesen A_x Personen mögen im Laufe der Beobachtungszeit noch B_x Personen des

Alters von x bis $x+1$ Jahren hinzukommen, ferner mögen C_x Personen des Alters von x bis $x+1$ Jahren aus dem Kreise der $A_x + B_x$ Personen austreten, so daß der Beobachter von ihnen nicht weiß, ob sie den $(x+1)$ten Geburtstag erlebt haben oder nicht, schließlich bedeute m_x die Anzahl der aus diesem Kreise im Alter von x bis $x+1$ Jahren während der Beobachtungszeit Verstorbenen. In den m_x Todesfällen sind also sowohl solche enthalten, die die A_x Personen ergaben, als auch solche, welche die B_x Personen während ihrer Beobachtungszeit lieferten, die kein ganzes Jahr umfaßt. Die Zahl m_x umfaßt aber nicht sämtliche Todesfälle, die im Alter von x bis $x+1$ Jahren unter den $A_x + B_x$ Personen eintraten, vielmehr fehlen diejenigen der C_x Personen, die sich vor der Erreichung des Lebensalters von $x+1$ Jahren der Beobachtung entzogen haben. Um den Veränderungen des Personenkreises Rechnung zu tragen, könnte man für jeden Ein- und Austretenden den Jahresbruchteil bestimmen, den er in Beobachtung durchlebt hat, und ihn statt mit dem Gewichte 1 nur mit diesem Jahresbruchteil unter den lebenden $x$jährigen verrechnen. Hierin liegt die Annahme, daß in gleichen Zeitteilen eines Jahres gleich viele Personen im Alter von x bis $x+1$ Jahren sterben. Um den fraglichen Jahresbruchteil der Beobachtungszeit nicht für jeden einzelnen Ein- und Austretenden berechnen zu müssen, nimmt man gewöhnlich an, daß die Ein- und Austritte gleichmäßig erfolgten und also eine jede der B_x und C_x Personen durchschnittlich ein halbes Jahr beobachtet wurde. Die Ein- und Austretenden sind dann bei unserer Annahme der gleichmäßigen Verteilung der Todesfälle auf die einzelnen Teile des Jahres wie $\frac{B_x}{2}$ bzw. $\frac{C_x}{2}$ Personen in Rechnung zu ziehen; die

m_x Verstorbenen sind aus der Anzahl $A_x + \frac{B_x}{2} - \frac{C_x}{2}$ Personen hervorgegangen zu denken. Die Formel (VII) modifiziert sich hiernach zu

$$q_x = \frac{m_x}{A_x + \frac{B_x - C_x}{2}} \,. \tag{9}$$

Wir wollen q_x nach Formel (9) aus der Bevölkerung eines ganzen Landes bestimmen; dies ist möglich, wenn man kennt:

1. vermöge einer Volkszählung die Anzahl aller lebenden Personen am Schluß eines Kalenderjahres, nach Geburtsjahren geordnet,

2. durch die Todesregister aus dem der Volkszählung voraufgehenden und folgenden Kalenderjahre die Anzahl aller Todesfälle, sowohl nach Altersjahren als nach Geburtsjahren geordnet.

Es sei z. B. durch eine am 31. Dezember 1907 stattgefundene Volkszählung die Anzahl L_{1882}^{1907} aller im Jahre 1882 geborenen Personen bekannt. Addiert man zu der durch die Volkszählung gefundenen Zahl L_{1882}^{1907} alle 1882 geborenen Personen, die nach dem Todesregister im Lande während des Jahres 1907, 25—26 Jahre alt, verstorben sind[1]) — ihre Anzahl sei $D_{25-26,\,1882}^{1907}$ —, so hat man ausschließlich Personen, die 1907 ihr fünfundzwanzigstes Lebensjahr vollendet haben. Diese Personen stehen nicht sämtlich während ihres ganzen

[1]) Man muß beachten, daß 1907 auch 1881 geborene, im Alter von 25—26 Jahren stehende Personen sterben, ein- und auswandern; ebenso sterben im Jahre 1908, wandern ein und aus Personen, die 1883 geboren sind und zur Zeit des Todes, der Ein- und Auswanderung im Alter von 25—26 Jahren stehen. Diese Personen kommen sämtlich bei der Bildung von q_{25} nicht in Frage.

25.—26. Lebensjahres unter Beobachtung; denn in $L_{1882}^{1907} + D_{25-26,\,1882}^{1907}$ ist auch die Differenz zwischen den 1907 im Alter von 25—26 Jahren eingewanderten und ausgewanderten Personen, die 1882 geboren sind, in Rechnung gezogen. Um q_{25} zu finden, ist diese Differenz in (9) nur halb zu verrechnen; mithin ist von $L_{1882}^{1907} + D_{25-26,\,1882}^{1907}$ die halbe Differenz zwischen den 1907 im Alter von 25—26 Jahren eingewanderten und ausgewanderten Personen, die 1882 geboren sind, zu subtrahieren. Es ist aber ferner noch, um den Nenner von (9) zu finden, die halbe Differenz zwischen den während des Jahres 1908 im Alter von 25—26 Jahren eingewanderten und ausgewanderten Personen, die 1882 geboren sind, zu dem gefundenen Ausdruck zuzuaddieren; denn die Beobachtung muß sich auch auf 1908 erstrecken, wo auch noch 1882 geborene Personen im Alter von 25—26 Jahren sterben. Wir nehmen nun für die zwei aufeinanderfolgenden Kalenderjahre gleichmäßige Verteilung der Zu- und Abwanderungen an; dann werden sich der zu subtrahierende und der zu addierende Teil tilgen. Der Nenner bei q_{25} wird auf der rechten Seite der Formel (9) einfach lauten: $L_{1882}^{1907} + D_{25-26,\,1882}^{1907}$. Der Zähler m_{25} wird offenbar gefunden, indem man alle nach den Todesregistern während der Jahre 1907 und 1908 im Alter von 25—26 Jahren verstorbenen Personen addiert, die 1882 geboren sind:

$$q_{25} = \frac{D_{25-26,\,1882}^{1907} + D_{25-26,\,1882}^{1908}}{L_{1882}^{1907} + D_{25-26,\,1882}^{1907}}.$$

Hat man verschiedene Volkszählungen, etwa am 31. Dezember 1901 und am 31. Dezember 1907, zur Verfügung, so wird man die Formel verwenden können:

$$q_{25} = \frac{D^{1901}_{25-26,\,1876} + D^{1902}_{25-26,\,1876} + D^{1907}_{25-26,\,1882} + D^{1908}_{25-26,\,1882}}{L^{1901}_{1876} + D^{1901}_{25-26,\,1876} + L^{1907}_{1882} + D^{1907}_{25-26,\,1882}}$$ [1]);

die Bedeutung der D und L ist durch die Indizes klar. In der letzten Formel hat man ebenso wie in der voraufgehenden im Nenner eine Summe von Personen, welche das 25. Lebensjahr überschritten haben, im Zähler die Summe derjenigen dieser Personen, die vor Vollendung ihres 26. Lebensjahres gestorben sind. Daß die im Zähler auftretenden Personen als in zwei verschiedenen Jahren geboren angenommen wurden, ist belanglos; denn zur Bestimmung von q_x brauchen die Personen nicht alle demselben Jahrgange zu entstammen. Sollten die Personen in drei oder mehr verschiedenen Jahren geboren sein, so ist genau analog zu verfahren.

Die soeben geschilderte Methode wurde im wesentlichen — es fand noch eine Korrektur wegen der nicht gleichmäßig erfolgten Zu- und Wegzüge statt — bei der Herstellung der deutschen Sterbetafel, gegründet auf die Sterblichkeit der Reichsbevölkerung in den 10 Jahren 1871/72 bis 1880/81, angewandt[2]).

Bei der Herstellung der Sterblichkeitstafeln 23 D. G. (vgl. S. 17) wurde die Formel (9) auf folgende Weise angewandt: Unter A_x verstand man alle diejenigen Personen, welche jemals an ihrem $x$ten Geburtstage bei einer der 23 beteiligten Lebensv'sanstalten von deren Eröffnung bis zum 31. Dezember 1875 (bei einer Gruppe

[1]) Vgl. Becker, Zur Berechnung von Sterbetafeln an die Bevölkerungsstatistik zu stellende Anforderungen, Formel (31). Congrès international de statistique à Budapest. 1876. A. a. O. findet man auch die Literatur angegeben. Von grundlegenden Schriften nennen wir noch die von Knapp (vgl. Zitat auf S. 10), Zeuner, Abhandlungen aus der math. Statistik, Leipzig 1869; Lexis, Einleitung in die Theorie der Bevölkerungsstatistik, Straßburg 1875.

[2]) Diese deutsche Sterbetafel ist nebst Vergleichungen mit anderen Sterbetafeln und mit Angabe der Art ihrer Berechnung veröffentlicht in den Monatsheften zur Statistik des Deutschen Reiches. Novemberheft 1887.

Versicherter bis 31. Dezember 1870) versichert gewesen waren. B_x bedeutete alle diejenigen Personen, die jemals im Alter von x bis $x + 1$ Jahren nach Erreichung ihres $x$ten Lebensjahres einer der V'sanstalten beigetreten waren. C_x bedeutete alle diejenigen Personen, die je im Alter von x bis $x + 1$ Jahren lebend aus dem V'sverhältnis ausgeschieden waren. Unter diese Ausgeschiedenen war es nötig, alle bei dem Termin der Zusammenstellung der Daten am 31. Dezember 1875 (bzw. am 31. Dezember 1870) im Alter von x bis $x + 1$ Jahren stehenden noch versicherten Personen mitzurechnen; denn diese letzteren Personen waren ja von ihrem $x$ten Geburtstage an kein ganzes Jahr unter Beobachtung, und es waren daher damals ja auch nicht sämtliche im Alter von x bis $x + 1$ Jahren aus ihnen stammende Todesfälle bekannt. Schließlich bedeutete bei 23 D. G. in Formel (9) m_x alle jemals im Alter von x bis $x + 1$ Jahren als Versicherte bei irgend einer der Anstalten verstorbenen Personen[1]).

Sowohl bei der deutschen Reichssterbetafel als auch bei der Tafel 23 D. G. liegt eine exakte Bestimmung der Sterbenswahrscheinlichkeiten von Geburtstag zu Geburtstag, also nach scharf abgegrenzten Altersjahren, vor. Will man die Sterbenswahrscheinlichkeiten q_x auf Grund eines gegebenen Personenmaterials, das nur ein Kalenderjahr beobachtet werden soll, bestimmen — Angaben, bei denen das Kalenderjahr als Zeiteinheit gewählt ist, findet man bisweilen in Berichten von V'sanstalten —, so hat man es mit einem ,,künstlichen Problem der Sterblichkeitsmessung“ zu tun, und ,,solch ein künstliches Problem in exakter Weise lösen wollen,

[1]) Vgl. die Würdigung dieser Tafel bei Engelbrecht, Zeitschrift f. d. ges. Versicherungswissenschaft Bd. 6, 111 (1906).

ist in der Lehre von der Sterblichkeit, was in der Geometrie die Quadratur des Kreises ist“[1]). Man kann in diesem Fall nie nur den wirklichen Sachverhalt angeben, sondern muß Fiktionen, die verschiedenartig sein können, einführen. Sei z. B. q_x aus den Erfahrungen einer V’sanstalt an allen bei ihr vom 1. Januar 1908 bis 31. Dezember 1908 Versicherten zu finden, so kann man alle in Frage kommenden Personen, welche 1908 ihren $x$ten Geburtstag feiern (diese sind in demselben Kalenderjahre geboren), als wenn sie ausnahmslos am 1. Januar 1908 ihren $x$ten Geburtstag begehen, ansehen. Wir fingieren hier Personen als gleichaltrig, die am Neujahrstage 1908 sogar um ein Jahr in ihrem Alter differieren können. Bezeichnen wir mit $A_x^{(1908)}$ alle diejenigen Personen, die im Jahre 1908 ihren $x$ten Geburtstag begehen und bereits am 1. Januar 1908 bei der V’sanstalt versichert waren, mit $B_x^{(1908)}$ bzw. $C_x^{(1908)}$ alle diejenigen Personen, welche 1908 ihren $x$ten Geburtstag begehen und sich im Laufe des Jahres 1908 bei der V’sanstalt versichern bzw. aus dem V’sverhältnis lebend ausscheiden, schließlich mit $m_x^{(1908)}$ alle 1908 als Versicherte gestorbenen Personen, die 1908 x Jahre alt wurden oder hätten werden können, dann wird die Formel (9) übergehen in:

$$q_x = \frac{m_x^{(1908)}}{A_x^{(1908)} + \frac{B_x^{(1908)} - C_x^{(1908)}}{2}}. \tag{10}$$

Bedeutet $A_{x+1}^{(1909)}$ alle bei der Anstalt am 1. Januar 1909 versicherten Personen, die 1909 ihren $x+1$ten Geburtstag begehen, so ist offenbar

$$A_{x+1}^{(1909)} = A_x^{(1908)} - m_x^{(1908)} + B_x^{(1908)} - C_x^{(1908)}.$$

[1]) v. Bortkiewicz, Sterblichkeit und Sterblichkeitstafeln im Handwörterbuch der Staatswissenschaften.

Daher wird

$$B_x^{(1908)} - C_x^{(1908)} = A_{x+1}^{(1909)} + m_x^{(1908)} - A_x^{(1908)},$$

und die Formel (10) geht über in:

$$q_x = \frac{2\, m_x^{(1908)}}{A_x^{(1908)} + A_{x+1}^{(1909)} + m_x^{(1908)}} . \qquad (11)$$

Die Formel (11) gestattet natürlich auch mit Hilfe zweier Volkszählungen am Beginn zweier aufeinanderfolgender Kalenderjahre und des Totenregisters des dazwischenliegenden Jahres, wenn man bloß die Geburtsjahre der Gezählten und Verstorbenen kennt, q_x aus den Beobachtungen der Bevölkerung eines Landes zu finden.

Für V'sgesellschaften besonders wichtig ist die Bestimmung der Sterbenswahrscheinlichkeiten unter Wahl des V'sjahres als Zeiteinheit für die Beobachtung. Das V'sjahr ist für jeden Versicherten individuell und beginnt mit dem Tage seines Eintrittes in das V'sverhältnis bzw. seiner Wiederkehr. In bezug auf das Lebensalter wird eine Fiktion eingeführt. Eine bereits im V'sverhältnis stehende Person gilt als $x$jährig (x ganze Zahl), wenn sie im fiktiven Alter von $t = x - y$ Jahren in die V. eintrat und y volle V'sjahre durchlebte. Als Eintrittsalter gilt das nach den Statuten der Anstalt für die Prämienbemessung festgesetzte fiktive Alter t (t ganze Zahl); im Deutschen Reiche werden gewöhnlich $t - \frac{1}{2}$ bis $t + \frac{1}{2}$ Jahre alte Personen als $t$jährig versichert[1]). Will man Formel (9) zur Bestimmung von q_x anwenden, so sind unter A_x alle Personen zu verstehen, die bei der betreffenden V'sanstalt versichert in das $(x+1)$te fiktive

[1]) Eine am 1. April 1905 versicherte Person, die am 1. November 1880 geboren ist, hat das fiktive Eintrittsalter von 24 Jahren. Am 1. April 1908 hatte sie 3 V'sjahre vollendet und gilt als 27jährig. Löst sie in der Zeit bis zum 1. April 1909 ihren Vertrag oder stirbt sie, so gilt sie als im Alter von 27—28 Jahren ausgeschieden oder verstorben.

Lebensjahr traten. Erstreckt man, wie wir es hier verlangen, die Beobachtung jedes Versicherten von V'sjahr zu V'sjahr, so sind in Formel (9), wenn man von Lösung und späterer Wiederaufnahme des V'sverhältnisses absieht, keine Zutritte B_x von Personen, die kein ganzes Jahr beobachtet werden, zu berücksichtigen. Unter C_x wird man alle Personen zu verstehen haben, die im fiktiven Alter von x bis $x+1$ Jahren aus dem V'sverhältnis lebend ausschieden; m_x bedeutet alle im fiktiven Alter von x bis $x+1$ Jahren verstorbenen Versicherten. Man erhält:

$$q_x = \frac{m_x}{A_x - \frac{C_x}{2}}. \qquad (9')$$

Die so gewonnenen Sterbenswahrscheinlichkeiten gelten als für V'szwecke besonders brauchbar, weil sie sich der V'spraxis möglichst anschmiegen. Dieses Verfahren wird als Gothaer Methode bezeichnet und ist von J. Karup 1879 bei Bearbeitung der Sterblichkeitserfahrungen der Gothaer Bank angewendet worden[1]). Die Gothaer Methode ist in den letzten Jahren u. a. bei der Konstruktion der Tafeln der 60 britischen Gesellschaften (vgl. S. 16), der österreichischen Versicherten (vgl. S. 19), der Gothaer Lebensv'sbank[2]), der Lebensv'sgesellschaft zu Leipzig[3]) und der Stuttgarter Lebensv'sbank[4]) zur Anwendung gekommen.

---

[1]) Vgl. hierüber die Angaben von Roghé in seiner an historischem Material reichen, aber in bezug auf Kritik mit Vorsicht zu benützenden Schrift: „Geschichte und Kritik der Sterblichkeitsmessung bei V'sanstalten." Suppl. XVIII der Jahrbücher f. Nationalökonomie u. Statistik. Jena 1891.

[2]) J. Karup, Die Reform des Rechnungswesens der Gothaer Lebensv'sbank. Jena 1903.

[3]) G. Hoeckner, Änderung der Rechnungsgrundlagen sowie Aufstellung einer Sterblichkeitstafel, eines Prämien- und Dividendensystems für die Lebensv'sgesellschaft zu Leipzig. Leipzig 1907.

[4]) A. Lohmüller, Sterblichkeitsuntersuchungen auf Grund des Materials der Stuttgarter Lebensv'sbank (Alte Stuttgarter) 1854—1901. Jena 1907.

Die Formel (9′) wird häufig noch modifiziert, indem man die Austritte C_x nicht auf die Mitte des V'sjahres verlegt, sondern alle Personen, die ihre V. in der zweiten Hälfte des V'sjahres lösten, als ein ganzes Jahr unter Beobachtung stehend annimmt, hingegen den Austritt aller Personen, der in der ersten Hälfte des V'sjahres stattfand, auf den Beginn des V'sjahres verlegt[1]). Man erhält demnach die Formel $q_x = \frac{m_x}{A_x}$ (9″). Hierbei bedeutet A_x die Gesamtheit aller $x$jährigen Personen, die entweder nach Beginn ihres fiktiven $(x+1)$ten Lebensjahres als Versicherte starben — ihre Anzahl ist die im Zähler stehende Zahl m_x — oder das ganze Jahr ihr V'sverhältnis aufrechterhielten oder ihren Vertrag vorzeitig in der zweiten Hälfte des V'sjahres lösten.

Die durch Beobachtung gewonnenen Werte der Sterbenswahrscheinlichkeiten $q_0, q_1, q_2, \ldots$ zeigen gewöhnlich Unregelmäßigkeiten, die man Zufälligkeiten oder der Beschränktheit des Beobachtungsfeldes zuschreiben zu müssen glaubt. Würde man die beobachteten Werte q_x zur Herstellung einer Sterbetafel benützen, so würde auch diese Unebenheiten zeigen, die sich dann den zu V'szwecken zu berechnenden Prämientarifen ebenfalls mitteilen würden. Zur Beseitigung dieser Unebenheiten werden die beobachteten Werte der Sterbenswahrscheinlichkeiten q_x gewöhnlich ausgeglichen, d. h. durch andere Werte ersetzt, die nicht zu sehr von den beobachteten abweichen und einen annähernd regelmäßigen Verlauf zeigen[2]). Die Aus-

---

[1]) Vgl. J. Karup, Reform S. 5 und Absterbeordnung aus Beobachtungen an österreichischen Versicherten. Bd. I, S. 62.

[2]) Über Ausgleichung vgl. Blaschke, Vorlesungen über mathematische Statistik, S. 192—256, und des Verfassers Artikel „Ausgleichung" in Manes' V's-Lexikon.

gleichungsmethoden sind dabei graphischer, mechanischer oder analytischer Natur. Die letzteren, der Sterblichkeitsmessung besonders eigentümlich, beruhen darauf, die beobachteten Werte für q_x oder die aus ihnen berechneten Werte für l_x (vgl. S. 32) einer Formel anzupassen. Von solchen Formeln oder **Sterblichkeitsgesetzen** ist das berühmteste das von dem V'smathematiker Gompertz 1825 veröffentlichte, von Makeham 1860 verbesserte **Makeham - Gompertzsche Gesetz**. Es gibt die Anzahl der Lebenden l_x des Alters x in ihrer Abhängigkeit von dem Alter x:

$$l_x = c \cdot k^x \cdot g^{r^x}; \tag{12}$$

c, k, g, r bedeuten dabei Konstante, welche auf Grund des beobachteten Materials, so daß sie dessen allgemeine Züge möglichst genau wiedergeben, zu wählen sind; die fraglichen Konstanten besitzen für die verschiedenen Sterblichkeitstafeln verschiedene Werte. Die angegebene Formel (12), welche zur Ausgleichung einer Anzahl von Sterblichkeitstafeln benützt wurde, gibt, vom Alter $x = 20$ bis 35 anfangend, also mit Ausschluß des jugendlicheren Alters, eine recht gute Idee des Verlaufes der Sterblichkeit. Wählt man l_{30} willkürlich,

$$\log k = -0{,}0025276\,, \qquad \log g = \frac{-0{,}0000728}{r-1}\,,$$

$r = 1{,}087398$ und $c = \dfrac{l_{30}}{k^{30} \cdot g^{r^{30}}}$, so liefert Formel (12) für $x \geqq 30$ die Sterbetafel, welche von der preußischen Rentenversicherungsanstalt, wohl dem größten derartigen deutschen Institut, auf Grund ihrer eigenen Erfahrung an männlichen Rentenversicherten hergeleitet wurde und seit 1901 den Leibrentenberechnungen der Anstalt für männliche Personen zugrunde liegt. Wählt man

für l_{33} in Formel (12) eine ganz willkürliche Zahl, $\log k = -0{,}0020348$, $\log g = \frac{-0{,}0000045}{r-1}$, $r = 1{,}12212$ und $c = \frac{l_{33}}{k^{33} \cdot g^{r^{33}}}$, so liefert die Formel (12) diejenige ausgeglichene Sterbetafel, welche die preußische Renten-v'sanstalt aus ihren eigenen Erfahrungen an weiblichen Rentenversicherten gewonnen hat und seit 1901 bei ihrem Leibrentengeschäft mit Frauen verwendet, falls ihr Lebensalter 33 Jahre beträgt oder übersteigt[1]).

§ 3. Die gebräuchlichen Sterblichkeitstafeln.

Die Sterbenswahrscheinlichkeiten, auf denen eine jede Sterblichkeitstafel basiert, zeigen je nach der Art des zu ihrer Herleitung verwandten Beobachtungsmaterials erhebliche Abweichungen; für gleichzeitig lebende, aber räumlich getrennte oder geschlechtlich verschiedene Grundmassen, für Schichten einer Bevölkerung, die z. B. durch Beruf oder Einkommen charakterisiert sind, werden sich voneinander abweichende Sterblichkeitstafeln ergeben. Für V'szwecke kommen heutzutage vorzugsweise drei Gattungen von Sterblichkeitstafeln[2]) zur Verwendung: Sterblichkeitstafeln aus den Beobachtungen einer ganzen Bevölkerung, aus den Beobachtungen von normal auf den Todesfall versicherten Personen, sowie aus den Beobachtungen an Personen, die auf Leibrenten oder den Erlebensfall versichert waren.

[1]) Vgl. Hartung, Sterblichkeitstafeln für Rentenversicherungen. Berichte des fünften internationalen Kongresses für V'swissenschaft zu Berlin (1906), Bd. 1, S. 311.

[2]) Über die im Deutschen Reiche verwendeten Sterblichkeitstafeln vgl. man besonders die vom Kais. Aufsichtsamt f. Privatv. stammende Publikation: „Die gebräuchlichsten Sterblichkeitstafeln der im Deutschen Reiche arbeitenden Lebensv'sunternehmungen“, Heft 11 der Veröffentlichungen des Deutschen Vereins f. V'swissenschaft (1906).

Sterblichkeitstafeln für ganze Bevölkerungen eines Landes, welche früher von den V'sunternehmungen auch für das normale Todesfallgeschäft verwandt wurden, ehe die Anstalten hierfür besondere Tafeln hatten, können heute den V'sinstituten zur Kontrolle und zur Ergänzung für das höchste und niedrigste Lebensalter, für das die eigenen Erfahrungen der Anstalten bisweilen zu gering sind, dienen. Ferner wird man Sterblichkeitstafeln aus den Erfahrungen ganzer Bevölkerungen für V'en der wirtschaftlich schwachen Elemente auf kleine Beträge, sogenannte Volks-, auch Mark-, Arbeiter- oder Sterbekassenv. genannt, anwenden. Das Eigentümliche dieser V'sgattung ist, daß dieselbe nur auf eine kleinere, von dem Versicherten nicht überschreitbare Summe abgeschlossen werden darf und die Anstalt von vollständiger ärztlicher Untersuchung des sich auf den Todesfall Versichernden absieht[1]). Diese kleine Lebensv. wird nicht nur von den großen V'sanstalten, sondern auch von einer Unzahl von Berufsvereinigungen, Pensions- und Sterbekassen mit nur lokaler Bedeutung betrieben. Als Rechnungsgrundlage für die Volksv. hat im Deutschen Reiche die S. 37 genannte deutsche Reichssterbetafel, und zwar die Männersterbetafel, größte Verbreitung gefunden. Die neue zweite deutsche Reichssterbetafel[2]) aus den Erfahrungen an der Reichsbevölkerung im Jahrzehnt 1891/1900 zeigt, daß infolge der Verbesserung der Lebenshaltung, der Fortschritte in der Heilkunde, in der Hygiene und der zunehmenden sozialen Fürsorge die Sterblichkeit bedeutend abgenommen hat. Ein starker Rück-

[1]) Über das Wesen der Volksv. vgl. die Artikel über Volksv. im Bande I der Berichte, Denkschriften und Verhandlungen des fünften internationalen Kongresses für V'swissenschaft zu Berlin. Berlin 1906, S. 1—168.

[2]) Allgemeine deutsche Sterbetafel in den Vierteljahrsheften zur Statistik des Deutschen Reiches. 1908. III. Die ausführliche Publikation steht noch aus.

gang der Sterblichkeit der allgemeinen Bevölkerung ist auch in einzelnen deutschen Bundesstaaten[1]), wie in der Schweiz[2]) bemerkt worden. Die V'sanstalten fahren daher bei der Todesfallv. mit der alten deutschen Reichssterbetafel keineswegs zu ihren Ungunsten, sie schlagen die Sterblichkeit und die Prämien zu hoch an und erzielen Sterblichkeitsgewinn. Die Behandlung der Frau in der Volksv. nach der Männersterbetafel erspart den Anstalten die Durchführung besonderer Prämien- und Reservenberechnungen und ist ihnen nicht schädlich; denn sowohl die alte als die neue deutsche Reichssterbetafel verzeichnen für die Frau fast in allen Altersklassen geringere Sterbenswahrscheinlichkeiten als für den Mann. Im Deutschen Reich werden sonst für Volksv'en noch die S. 18 erwähnte Tafel 23 D. G. M u. W III, die Sterbetafel III von Blaschke[3]) für minderwertige Leben mittlerer Gefahrenklasse, ferner Absterbeordnungen deutscher Bundesstaaten (Preußen, Sachsen), in Süddeutschland auch die aus schweizerischen Beobachtungen von 1881—1888 hervorgegangene (sog. Durrersche) Sterbetafel verwandt[4]).

Für die normale Todesfallv., bei der vollständige ärztliche Untersuchung verlangt wird und eine größere, beim Tode der versicherten Person zahlbare Summe in

---

[1]) Vgl. „Die neuen Sterblichkeitstafeln für die Gesamtbevölkerung des Königreichs Sachsen" von Zeuner, Zeitschr. d. k. sächsischen statistischen Bureaus, Bd. 49, Jahrg. 1903, S. 76. Ballod, Sterblichkeit und Lebensdauer in Preußen, Zeitschr. d. k. preußischen statistischen Landesamts, Bd. 48, Jahrg. 1908, S. 1.

[2]) Vgl. die Zusammenstellung der Absterbeordnungen für die schweizerische Bevölkerung in den Jahren 1876/77—1899/1900 im Bericht des Eidg. V'samtes über das Jahr 1907, S. XXII.

[3]) E. Blaschke, Denkschrift zur Lösung des Problems der V. minderwertiger Leben. Wien 1895.

[4]) Ehe, Geburt und Tod in der schweizerischen Bevölkerung während der 20 Jahre 1871—1890. Erste Hälfte des dritten Teils der 128. Lieferung der schweizerischen Statistik. Bern 1901. Hierin auch v'stechnische Werte.

Frage kommt, wird von den meisten deutschen Lebensv'sanstalten — von größeren machen nur die Gothaer und die Leipziger Lebensv'sgesellschaft, die aus eigenen Erfahrungen hergeleitete Selektionssterbetafeln besitzen (vgl. Kap. IX), eine Ausnahme — 23 D. G. M u. W I als Rechnungsgrundlage verwandt. Die von der alten Stuttgarter aus ihren eigenen Erfahrungen hergeleitete Sterbetafel wird von dieser nur für die Bestimmung der Deckungskapitalien benützt, hingegen bestimmt die Gesellschaft ihre Prämien nach der Tafel 23 D. G. M u. W I [1]). Vom wissenschaftlichen Standpunkte ist zu sagen (vgl. S. 17), daß diese Tafel weder die Sterblichkeitsverhältnisse der Männer noch die der Frauen widerspiegelt; bei anderer Verteilung der beobachteten Personen nach dem Geschlechte hätten sich andere Sterblichkeitsverhältnisse ergeben. Den tatsächlichen Verhältnissen kann diese Tafel nur entsprechen, wenn auch die Anzahl der dem V'sunternehmen beitretenden Männer und Frauen proportional der bei der Konstruktion der Tafel verwandten ist; dies ist in Deutschland infolge des starken Rückganges der Frauenv. durchaus nicht der Fall. Ein Vergleich der Tafel 23 D. G. M u. W I mit der neuen deutschen Reichssterbetafel für Männer zeigt, daß die Volkssterbetafel in den meisten Altersklassen kleinere Sterbenswahrscheinlichkeiten als die Tafel für „ausgewählte“ Leben aufweist. Zweierlei Lehren dürfte man hieraus ziehen: Die im deutschen V'sbetriebe herrschende Tafel 23 D. G. M u. W I ist heutigen Tages kein sehr feines Sterblichkeitsmaß für normal versicherte, durch ärztliche Selektion ausgewählte Leben; andererseits wird man, wenn man der Volksv.

[1]) Veröffentlichungen des Kais. Aufsichtsamts f. Privatv. Jahrg. 1908, S. 77.

die neue deutsche Reichssterbetafel als Grundlage für die Prämienberechnung empfiehlt, dies nur mit genügend hohen Sicherheitszuschlägen tun, da sie doch Überschätzung künftiger Langlebigkeit mit sich führen könnte. Trotz der aus Männer- und Frauenbeobachtungen gemeinsam hergestellten Tafel 23 D. G. M u. W I erheben die meisten deutschen V'sgesellschaften bei der normalen Todesfallv. von Frauen Zuschläge, etwa 1—5 ‰ der V'ssumme für das Jahr.

In Frankreich verwendet man für die Todesfallv. ärztlich vollständig untersuchter Leben die aus Erfahrungen an Männern und Frauen hergestellte Tafel A. F. (assurés français)[1]). Die von den amerikanischen Lebensv'sgesellschaften benützte Todesfallsterbetafel ist die sog. amerikanische Sterbetafel[2]); das V'sgesetz des Staates New York schreibt sie sogar als Rechnungsgrundlage zur Bestimmung der Deckungskapitalien vor.

Im Geschäftsbetrieb der englischen Gesellschaften sind für das Todesfallgeschäft besonders die Tafeln H^M (H^M ist eine Abkürzung für healthy males = gesunde männliche Leben), $H^{M(5)}$ der 20 englischen Gesellschaften (vgl. S. 16) und O^M (Offices males = tarifmäßig aufgenommene männliche Leben) der 60 britischen Gesellschaften in Gebrauch[3]). Bezüglich der Tafel $H^{M(5)}$ ist

---

[1]) Vgl. Berichte des Eidg. V'samtes über die Jahre 1892, S. 8, 1893, S. 18, 1895, S. 8. A. a. O. findet man auch die Tafel A. F. wie R. F. (vgl. S. 51) mit Angabe von Rentenwerten a_x abgedruckt. Die Tafeln A. F. und R. F. sind veröffentlicht in Tables de mortalité du comité des assurances de compagnie. Paris 1895.

[2]) Die Tafel ist veröffentlicht von Sheppard Homans, dem Aktuar der „Mutual Life Insurance Company", unter dem Titel „Report exhibiting the experience of the Mutual Life Insurance Company of New York". New York 1859. Die Tafel ist nicht zu verwechseln mit der Tafel der 30 amerikanischen Gesellschaften, die in dem Werk veröffentlicht ist: L. W. Meech, System and Tables of Life Insurance. Norwich, Connecticut. 1881. Letztere Tafel hat für die Praxis keine Bedeutung. (Nach freundlichen Angaben von Herrn Professor Dr. G. Bohlmann.)

[3]) Die Tafel O^M mit v'stechnischen Werten ist publiziert in dem

zu bemerken, daß sie eine „abgestutzte“ Tafel ist; zu ihrer Herstellung sind nur die Sterblichkeitsverhältnisse von Versicherten mit längerer als fünfjähriger V'sdauer verwendet worden. Die Tafel O^M unterscheidet ebenso wie alle — abgesehen von $H^{M(5)}$ — bisher besprochenen Tafeln, was mit Rücksicht auf Kap. IX bemerkt wird, nicht zwischen der V'sdauer. Sie ist aus der Beobachtung an Personen abgeleitet, die eine gewöhnliche Todesfallv. mit jährlich gleichbleibender Prämienzahlung abgeschlossen hatten.

Die Erfahrung hat gelehrt, daß die von den Versicherten selbst getroffene Selektion für sie viel günstiger ist als diejenige, welche von seiten der V'sanstalten durch ärztliche Untersuchung bei den auf den Todesfall Versicherten geübt wird. Personen, welche aus freien Stücken eine Versicherung auf den Erlebensfall (vgl. S. 7) oder auf eine Leibrente eingehen, stellen eine auserlesen gesunde Gesellschaft mit viel geringeren Werten der Sterbenswahrscheinlichkeiten dar als die auf den Todesfall Versicherten. Nur die Hoffnung auf ein langes Leben scheint von selbst zu derartigen V'en zu führen, und die persönliche Anschauung über die eigene Gesundheit erweist sich als ungemein treffend. Wegen der Langlebigkeit der Leibrentner und Leibrentnerinnen hat man sogar schon vorgeschlagen, dieselben im Interesse der V'sunternehmung ärztlich untersuchen zu lassen, ob die sich Versichernden nicht zu günstige Lebensaussichten haben. Bei dem Rentengeschäft muß eine Lebensv'sunternehmung, wenn diese Abteilung für sich allein ohne Beanspruchung der Mittel anderer Abteilungen des Instituts bestehen soll, sehr

Bande „British offices life tables, 1893“, der den Untertitel hat: „Tables deduced from the graduated experience of whole-life participating assurances on male lives. Aggregate tables.“ (Vgl. S. 16.)

vorsichtig zu Werke gehen. Die Sterbetafeln werden sehr genau im Einklang mit der Erfahrung gewählt werden müssen, auch sind trotz Vermehrung der Rechnungen im Geschäftsbetriebe für die zwei Geschlechter zwei verschiedene Tafeln zu benützen; denn die Sterblichkeit der Leibrentnerinnen ist wesentlich niedriger als die der Leibrentner, und gerade die ersteren bevorzugen die Leibrentenv. erfahrungsgemäß besonders.

Als die preußische Rentenv'sanstalt im Jahre 1901 eine Trennung zwischen männlichen und weiblichen Rentenversicherten vornahm und für beide gesonderte Tafeln (vgl. S. 43) verwendete, war dies in Deutschland noch eine singuläre Erscheinung. Jetzt besitzen die Germania in Stettin, die Allgemeine Rentenanstalt in Stuttgart und die Bayerische V'sbank in München (früher Bayerische Hypotheken- und Wechselbank) aus eigenen Erfahrungen abgeleitete, geschlechtlich getrennte Rentnersterbetafeln. Eine Reihe älterer Tafeln hat das Kais. Aufsichtsamt kürzlich als Rechnungsgrundlage für den Abschluß sofort beginnender Leibrenten infolge des langsamen Absterbens der Leibrentner verboten[1]). Mehr und mehr gewinnt die Überzeugung von der Notwendigkeit nach dem Geschlecht getrennter Tarife in der Rentenv. an Boden, so benützt der Atlas in Ludwigshafen seit seiner Gründung die Tafeln von A. J. Finlaison (Mortality experience of government life annuitants between 1808 and 1875 according to the report of 1883 of Alexander John Finlaison), und auch die geschlechtlich getrennten Leibrententafeln der 43 britischen Gesellschaften werden in Deutschland verwendet. In Frank-

[1]) Vgl. Veröffentlichungen des Kais. Aufsichtsamts Jahrg. 1908, S. 78.

reich, wo die Leibrentenv. besonders blüht, wird, und zwar eigentümlicherweise, eine geschlechtlich nicht getrennte Tafel R. F. (Rentiers français) benützt[1]).

§ 4. Die Sterblichkeitstafeln in ihrer Bedeutung für die Zukunft.

Für eine jede Lebensv'sanstalt ist es von größter Wichtigkeit zu wissen, ob den Sterbenswahrscheinlichkeiten, die sie einer Sterbetafel entnommen hat, unabhängig von der Zeit der Beobachtung eine annähernde Konstanz zukommt, d. h. ob für die künftige Gruppierung der Todesfälle bei ähnlich geprägtem Menschenmaterial ziemlich analoge Verhältnisse, wie sie die Sterblichkeitstafel angibt, erwartet werden dürfen. Ob nun für eine große Zahl ähnlicher Individuen sich die Sterbenswahrscheinlichkeit q_x mit gewisser Annäherung als eine bloße Funktion des Alters x ansehen läßt oder auch von der Zeit, zu der die $x$jährige Personen leben, abhängig ist, kann nie aus einer einzigen Bestimmung des q_x, mag sie auch vermöge eines noch so großen Materials erfolgt sein, geschlossen werden. Vielmehr werden jedenfalls zur Entscheidung der Frage eine nicht allzu kleine Anzahl von Beobachtungsreihen nötig, von denen eine jede auf Grund gleichartigen Materials aus verschiedenen Geburtsjahren einen Wert des q_x zu ermitteln gestattet; dann ist der Verlauf der Schwankungen der aus verschiedenen Geburtsjahrgängen bestimmten Sterbenswahrscheinlichkeiten q_x für gleiche Altersklassen zu untersuchen. Bewegen sich die Schwan-

[1]) Für die Rentenv. vgl. Schmerler, Über Rentnersterbetafeln, Bd. 1 der Berichte des fünften internationalen Kongresses f. V'swissenschaft, S. 323 (1906) und seine Schrift: Die Sterblichkeitserfahrungen unter den Rentenversicherten sowie die für die bekanntesten Rentnersterbetafeln zu 3½ % und 4 % berechneten Grundziffern. Berlin 1893.

kungen der aus verschiedenen Geburtsjahrgängen bestimmten q_x desselben Lebensalters x innerhalb solcher Grenzen, wie sie es nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung tun sollten, so findet, um einen Ausdruck des bekannten Göttinger Volkswirtschaftslehrers Professor Lexis[1]), der sich um die Aufrollung dieser Frage die größten Verdienste erworben hat, zu benützen, normale Dispersion statt. In diesem Fall kann man annehmen, daß den für die Altersklasse der $x$jährigen gewonnenen verschiedenen Sterbenswahrscheinlichkeiten eine gemeinsame mathematische Wahrscheinlichkeit zugrunde liegt. Derartige Untersuchungen hat zuerst J. H. Peek (Zeitschrift f. Versicherungs-Recht und -Wissenschaft, Bd. 5, 1899) ausgeführt, indem er an der Hand der niederländischen Statistik aus den Jahren 1880—1889 gewissermaßen zehn Sterbetafeln verglich. Nach unseren heutigen Anschauungen stellen die Sterbenswahrscheinlichkeiten q_x der allgemeinen Bevölkerung und der Versicherten (abgesehen von den Kinderjahren) für kleine Zeiträume typische Zahlreihen mit normaler Dispersion dar, d. h. sie bringen für nicht allzu lange Zeiträume und gleichartige Personenklassen ein nahezu konstantes, von den einzelnen Beobachtungsjahren nahezu unabhängiges Zahlenverhältnis zum Ausdruck und dürfen als mit der Beobachtungszeit sich nur langsam ändernd behandelt werden.

Für den einzelnen $x$jährigen gibt es, worauf schon früher (S. 28) hingewiesen wurde, eine unendliche Menge

[1]) W. Lexis, Zur Theorie der Massenerscheinungen in der menschlichen Gesellschaft. Freiburg i. B. 1877. Seine weiteren Untersuchungen sind zusammengefaßt in „Abhandlungen zur Theorie der Bevölkerungs- und Moralstatistik". Jena 1903. Vgl. auch Bohlmann, Vierte Vorlesung über V'smathematik bei Klein und Riecke, Über angewandte Mathematik. Leipzig 1900. Blaschke, Vorlesungen über mathematische Statistik, Leipzig 1906, S. 143.

individueller Umstände, die seinen Tod herbeiführen können. Die Individuen verschiedener Generationen können sich aber in bezug auf die Gruppierung nach der Lebensfähigkeit ersetzen; sie können als fungibel angesehen werden. Eine solche „Fungibilität der Individuen, die die Individualisierung teilweise wieder aufhebt" (Lexis), ist die Grundlage der Prämienbestimmung in der Lebensv.

Große Epidemien und Kriege werden natürlich sprungweise die Sterblichkeit ändern; aber im allgemeinen werden große Lebensv'sanstalten vertrauensvoll mit Recht eine Zeitlang eine auf Grund analogen Menschenmaterials, wie es die Anstalt versichert, konstruierte Sterbetafel für ihre Berechnungen benützen dürfen. Diese Aussage heißt aber nicht, daß eine V'sgesellschaft dieselbe Sterblichkeitstafel für alle Ewigkeit ihren Rechnungen zugrunde legen darf. In größeren Zeiträumen ändert sich die Sterblichkeit gewiß; so ist sie im 19. Jahrhundert in allen Kulturstaaten niedriger als in den voraufgegangenen Jahrhunderten[1]), und auch in den letzten Jahrzehnten ist eine Minderung der Sterblichkeit zu konstatieren.

III. Kapitel.

Einmalige Nettoprämien für die Versicherung auf das Leben einer Person.

Prinzipien: Um die einmalige Nettoprämie einer Person, die im Alter von x Jahren irgendeine von ihrer Lebensdauer abhängige V. eingeht, zu bestimmen,

[1]) Westergaard, Die Lehre von der Mortalität und Morbilität, 2. Aufl., Jena 1901, S. 253.

nehmen wir an, daß statt der einen Person eine fingierte Gesellschaft von so vielen $x$jährigen Personen l_x, wie sie die der Rechnung zugrunde liegende Sterblichkeitstafel angibt, gleichzeitig unter denselben Bedingungen die V. abschließt. Wir berechnen dann den Barwert (vgl. S. 23) aller Leistungen des V'sunternehmens für den Zeitpunkt des Abschlusses des Vertrages an diese fingierte Gesellschaft von l_x Personen unter der Annahme, daß diese fingierte Gesellschaft genau nach der Sterblichkeitstafel abstirbt. Hierbei legen wir einen rechnungsmäßigen Zinsfuß von $100\,i\,\%$ (vgl. S. 20), der voraussichtlich bis zum Abschluß dieser l_x Verträge erzielt wird, zugrunde. Nach dem Prinzip der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung — bei der Nettoprämie sieht man von Gewinn und Unkosten des V'sunternehmens ab — müssen die l_x Personen bei Abschluß des Vertrages den für jenen Termin berechneten Barwert aller in Zukunft zu leistenden Auszahlungen des V'sunternehmens an dieses einzahlen; eine Person zahlt als einmalige Nettoprämie den $l_x$ten Teil. Diese Nettoprämie deckt die Nettoausgaben des V'sunternehmens, wenn der rechnungsmäßige Zins von der Anstalt wirklich erzielt wird und das Sterben nach der Sterblichkeitstafel vor sich geht.

Die Formeln werden im folgenden unter der Annahme, daß der Versicherte sich auf die Einheit des Kapitals oder der Rente versichert hat, hergeleitet werden. Bedingt sich der Versicherte statt der Einheit die Summe S aus, so hat er den Sfachen Betrag als Nettoprämie zu zahlen.

§ 1. Lebenslängliche, jährlich postnumerando zahlbare Leibrente.

Eine jetzt $x$jährige Person versichert sich bei einer Rentenanstalt, daß sie, mit ihrem $x+1$ten Geburtstage beginnend, alljährlich an demselben Tage, solange sie diesen erlebt, eine Leibrente in gleicher Höhe ausgezahlt erhalten soll. Diese Leibrente heißt kurz: *Postnumerandoleibrente* oder *nachschüssige Leibrente*. Ist die zur Auszahlung gelangende Rente die Einheit, so bezeichnet man die einmalige Nettoprämie der sich versichernden $x$jährigen Person mit a_x (X).

Wir nehmen an, daß eine fingierte Gesellschaft von l_x Personen des Alters von x Jahren, wie sie die als Rechnungsgrundlage gewählte Sterblichkeitstafel angibt, eine V. auf eine Postnumerandoleibrente in der Höhe 1 abschließt. Von diesen l_x Personen erleben, wenn sie nach der Sterblichkeitstafel absterben, was wir voraussetzen, noch l_{x+1} ihren $x+1$ten Geburtstag. An jede dieser l_{x+1} Personen hat die V'sanstalt laut Vertrag die Rente 1 zu zahlen; an alle l_{x+1} Personen mithin die Summe l_{x+1}, deren Wert bei Abschluß des Vertrages, da die Zahlung ja erst ein Jahr nach Beginn der V. erfolgt, nach Formel (4) auf S. 23 $l_{x+1} v$ beträgt, wobei v der Diskontierungsfaktor ist, welcher dem als Rechnungsgrundlage gewählten Zinsfuß entspricht; es ist also $v = \frac{1}{1{,}035}$, wenn ein Zinsfuß von $3^1/_2\%$ als Rechnungsgrundlage erwählt wird.

Zwei Jahre nach Abschluß des Vertrages leben von der fingierten Gesellschaft nur noch l_{x+2} Personen; an diese hat die Leibrentenanstalt eine Zahlung in der Höhe l_{x+2} zu leisten. Der Barwert dieser Summe ist bei Abschluß des Vertrages nach Formel (4): $l_{x+2} v^2$.

Auf diese Art und Weise sind unter Anwendung von Formel (4) die Barwerte der Leistungen des V'sinstituts an die fingierte Gesellschaft für den Zeitpunkt des Abschlusses des Vertrages weiter zu berechnen. Ist ω das höchste Lebensalter, für welches die Sterblichkeitstafel noch lebende Personen aufführt, so hat die letzte Zahlung der V'sanstalt $\omega - x$ Jahre nach Abschluß des Vertrages zu geschehen; ihre Höhe ist, da dann noch l_ω Personen nach der Sterblichkeitstafel leben, l_ω. Der Barwert dieser Summe zur Zeit des Abschlusses des Vertrages ist $l_\omega \cdot v^{\omega - x}$. Durch Summation findet man den Barwert der Gesamtleistungen des V'sunternehmens bei Abschluß des Vertrages:

$$l_{x+1}\,v + l_{x+2}\,v^2 + l_{x+3}\,v^3 + \ldots + l_\omega\,v^{\omega-x}.$$

Diese Summe würde also bei Beginn des V'svertrages zur künftigen Auszahlung aller V'sleistungen ausreichen, wenn das Absterben und die Verzinsung nach den angenommenen rechnungsmäßigen Grundlagen vor sich gehen.

Infolge des Prinzips der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung muß die fingierte Gesellschaft von l_x Personen, um sich die Vorteile des Vertrages zu verschaffen, beim Abschluß desselben die eben gefundene Summe als einmalige Prämie der Leibrentenanstalt übergeben; eine Person zahlt mithin den $l_x$ten Teil dieser Summe. Die Nettoprämie a_x einer $x$jährigen Person für die jährlich postnumerando zahlbare, mit dem Tode aufhörende Leibrente in Höhe der Einheit ergibt sich:

$$a_x = \frac{l_{x+1}\,v + l_{x+2}\,v^2 + l_{x+3}\,v^3 + \ldots + l_\omega\,v^{\omega-x}}{l_x}. \quad (13)$$

Es ist offenbar:

$$a_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}\,v\left(1 + \frac{l_{x+2}\,v + l_{x+3}\,v^2 + \ldots + l_\omega\,v^{\omega-x-1}}{l_{x+1}}\right);$$

in Analogie mit (13) ist:

$$a_{x+1} = \frac{l_{x+2}\,v + l_{x+3}\,v^2 + \ldots + l_\omega\,v^{\omega-x-1}}{l_{x+1}},$$

daher wird:

$$a_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}\,v(1 + a_{x+1})\,. \tag{14}$$

Die Formel (14) kann direkt auf folgende Art abgeleitet werden: Wir nehmen an, daß statt einer einzigen $x$jährigen Person sich eine fingierte Gesellschaft von so vielen $x$jährigen Personen l_x, wie sie die Sterblichkeitstafel, welche der Rechnung zugrunde gelegt werden soll, angibt, auf eine jährliche, postnumerando zahlbare, lebenslänglische Leibrente in der Höhe der Einheit versichere. Die fingierte Gesellschaft soll dabei genau nach der Sterbetafel aussterben. Will sich die V'sanstalt ein Jahr nach Abschluß des Vertrages, wo sie ihre erste Auszahlung zu machen hat, von allen vertragsmäßig übernommenen Verpflichtungen an unsere fingierte Gesellschaft befreien, so hat sie an jede der dann noch lebenden l_{x+1} Personen erstens die fällige Rente in Höhe der Einheit, zweitens als Ablösungssumme a_{x+1} zu zahlen. Durch die Summe a_{x+1} kann sich nämlich eine jede der dann $x+1$jährigen Personen bei einer anderen auf Grund derselben Sterblichkeitstafel und desselben Zinsfußes arbeitenden Anstalt eine Postnumerandoleibrente in Höhe der Einheit erwerben. Die zu leistende Zahlung des V'sinstituts an die l_{x+1} Personen ist daher $l_{x+1}(1 + a_{x+1})$; ihr Barwert bei Abschluß des Vertrages, also ein Jahr früher, beträgt $l_{x+1}(1 + a_{x+1})v$. Nach dem Prinzip der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung hat die fingierte Gesellschaft von l_x Personen bei Abschluß des Vertrages an das V'sunternehmen folglich die Zahlung $l_{x+1}(1 + a_{x+1})v$

zu leisten; eine Person bezahlt als Nettoprämie a_x den $l_x$ten Teil. Hiermit hat man Formel (14).

Nach (VIII) war $p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$; dies in (14) gesetzt, gibt:

$$a_x = p_x v(1 + a_{x+1}) . \qquad (15)$$

Offenbar ist $a_\omega = 0$, denn keine Person der Sterblichkeitstafel erlebt ihren $\omega + 1$ten Geburtstag. Erteilt man in (15) dem x der Reihe nach die Werte $\omega - 1$, $\omega - 2$, $\omega - 3$, ..., so findet man:

$$a_{\omega-1} = p_{\omega-1} v ; \quad a_{\omega-2} = p_{\omega-2} v(1 + a_{\omega-1}) ,$$
$$a_{\omega-3} = p_{\omega-3} v(1 + a_{\omega-2}) , \ldots .$$

Durch diese Gleichungen kann man der Reihe nach, mit $a_{\omega-1}$ beginnend, wenn man die Lebenswahrscheinlichkeiten p_x kennt, welche die meisten Sterblichkeitstafeln angeben oder die man nach (VIII) finden kann, die Rentenwerte a_x berechnen.

Für $v = \frac{1}{1{,}035}$ und die Männersterbetafel der preußischen Rentenv'sanstalt ergeben sich $a_{30} = 18{,}313$, $a_{40} = 15{,}970$, $a_{50} = 13{,}101$, $a_{60} = 9{,}887$, $a_{70} = 6{,}693$. Ein 70jähriger hat also 669,30 Mk. an seinem Geburtstage als einmalige Nettoprämie zu bezahlen, um, mit seinem 71. Geburtstage beginnend, an jedem Geburtstage, den er erlebt, 100 Mk. als Leibrente zu erhalten.

Nach der Sterblichkeitstafel der preußischen Rentenv'sanstalt für weibliche Personen erhält man bei einem Zinsfuß von $3^1/_2\%$: $a_{30} = 20{,}479$, $a_{40} = 18{,}412$, $a_{50} = 15{,}601$, $a_{60} = 12{,}045$, $a_{70} = 8{,}070$. Infolge der geringeren Werte der Sterbenswahrscheinlichkeiten der Leibrentnerinnen als der Leibrentner ergeben sich bei Zugrundelegung der Frauensterbetafel größere Werte für a_x; die Frauen haben also, wenn sie sich in demselben Lebensalter auf eine Leibrente der gleichen Höhe wie ein Mann versichern wollen, nicht unbeträchtlich höhere Einlagen als Männer zu leisten.

Für Rentenberechnungen empfiehlt es sich, die Größen:

$$D_x = l_x \cdot v^x \text{ (XI) und}$$ (XI)

$$N_x = D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots D_\omega \text{ (XII)}$$ (XII)

einzuführen. Man nennt D_x die Zahl der diskontierten Lebenden des Alters x[1]). Multipliziert man in Formel (13) Zähler und Nenner rechter Hand mit v^x, so erhält man:

$$a_x = \frac{l_{x+1} v^{x+1} + l_{x+2} v^{x+2} + \ldots + l_\omega v^\omega}{l_x v^x}.$$

Hieraus ergibt sich mit Hilfe von (XI):

$$a_x = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_\omega}{D_x}. \tag{16}$$

Unter Benützung von (XII) folgt:

$$a_x = \frac{N_x}{D_x}. \tag{17}$$

Für Rechnungen bei Leibrentenanstalten tabuliert man für die zugrunde gelegte Sterblichkeitstafel nach Wahl eines Zinsfußes und damit des v erst nach (XI) die D_x, dann die N_x. Dabei beachte man, daß:

$$N_{x+1} = D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots + D_\omega$$

und daher nach (XII): $N_x = D_{x+1} + N_{x+1}$ (18)

wird. Man berechnet erst $N_{\omega-1} = D_\omega$, dann $N_{\omega-2} = D_{\omega-1} + N_{\omega-1}$, $N_{\omega-3} = D_{\omega-2} + N_{\omega-2}$ usw.

Aus N_x und D_x folgt nach (17) a_x.

---

[1]) Statt des Symbols N_x kann man nach der internationalen Bezeichnung auch das Symbol $\mathbf{N}_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_\omega$ (XII′) (XII′) benützen, so daß $N_x = \mathbf{N}_{x+1}$ ist; die fett gedruckte Größe $\mathbf{N}_x$ wird in dieser Schrift nur im letzten Kapitel verwendet werden.

§ 2. Lebenslängliche, jährlich pränumerando zahlbare Leibrente.

Versichert sich jemand derartig, daß er bis zu seinem Lebensende alljährlich die gleiche Summe erhalten will, das V'sinstitut aber die Rente bereits sofort bei Abschluß des Vertrages zahlen soll, so spricht man kurz von einer Pränumerandoleibrente oder vorschüssigen Leibrente. Sie unterscheidet sich von der im § 1 behandelten Postnumerandoleibrente nur dadurch, daß auch schon bei Beginn der V. die V'sanstalt die festgesetzte Rente zahlen soll. Die einmalige Nettoprämie für die eben geschilderte V. bezeichnet man, wenn die alljährlich zur Auszahlung gelangende Rente
(XIII) die Einheit ist, mit $\mathfrak{a}$ (XIII). Es ist offenbar

$$\mathfrak{a}_x = 1 + a_x \,. \tag{19}$$

Aus dieser Formel und (17) folgt:

$$\mathfrak{a}_x = 1 + \frac{N_x}{D_x} = \frac{D_x + N_x}{D_x} = \frac{N_{x-1}}{D_x} \,. \tag{20}$$

In der angegebenen Form hat die geschilderte V. eigentlich nur theoretischen Wert; denn der Versicherte wird sich nicht sofort bei Abschluß des Vertrages, wenn er seine Einzahlung an die V'sanstalt leistet, auch eine Auszahlung machen lassen. Man kann aber $\mathfrak{a}_x$ auch als Barwert oder Ablösungssumme für eine alljährlich wiederkehrende Zahlung ansehen, die eine $x$jährige Person, mit ihrem $x$ten Geburtstage beginnend, solange sie lebt, in der Höhe 1 zu leisten hat.

§ 3. Temporäre und aufgeschobene, jährlich zur Auszahlung gelangende Leibrenten.

Versichert sich eine $x$jährige Person auf eine ein Jahr nach Abschluß des Vertrages beginnende, höchstens

$n$mal, nur solange der Versicherte lebt, in gleichen Jahresbeträgen zur Auszahlung gelangende Leibrente, so spricht man von einer $n$jährigen, kurzen oder temporären oder auch aufhörenden, postnumerando zahlbaren Leibrentenv.. Ist die jährlich zur Auszahlung gelangende Summe die Einheit, so bezeichnet man die einmalige Nettoprämie mit $|_n a_x$ (XIV). Bei dieser V. hat das V'sinstitut genau dieselben Bedingungen wie bei der Postnumerandoleibrentenv. (§ 1) übernommen; nur zahlt die V'sanstalt zum letztenmal am $x+n$ten Geburtstage. Daher modifiziert sich Formel (13) zu: (XIV)

$$|_n a_x = \frac{l_{x+1}\, v + l_{x+2}\, v^2 + \ldots + l_{x+n}\, v^n}{l_x} \tag{21}$$

und Formel (16) zu:

$$|_n a_x = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_{x+n}}{D_x}\,. \tag{22}$$

Vermöge (XII) erhält man: $|_n a_x = \dfrac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$. (23)

Sind D_x und N_x für jeden Wert des x tabuliert, so kann man nach (23) $|_n a_x$ finden.

Berücksichtigt man (17), so ergibt sich aus (23), da:

$$|_n a_x = \frac{N_x}{D_x} - \frac{N_{x+n}}{D_{x+n}} \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x} \text{ ist,}$$

$$|_n a_x = a_x - \frac{D_{x+n}}{D_x}\, a_{x+n}\,. \tag{24}$$

Versichert sich eine $x$jährige Person auf eine sofort bei Abschluß des Vertrages beginnende, höchstens $n$mal, nur solange der Versicherte lebt, alljährlich in der gleichen Höhe zur Auszahlung gelangende Leibrente, so spricht man von einer $n$jährigen, kurzen

oder temporären oder aufhörenden Pränumerandoleibrente. Die einmalige Nettoprämie des Versicherten wird mit $|_n\mathbf{a}_x$ bezeichnet (XV), wenn die jährliche Rente 1 ist. In Analogie mit Formeln (21), (22) und (23) leitet man her:

(XV)

$$|_n\mathbf{a}_x = \frac{l_x + l_{x+1}\,v + l_{x+2}\,v^2 + \ldots + l_{x+n-1}\,v^{n-1}}{l_x} \tag{25}$$

$$|_n\mathbf{a}_x = \frac{D_x + D_{x+1} + \ldots + D_{x+n-1}}{D_x} \tag{26}$$

$$|_n\mathbf{a}_x = \frac{N_{x-1} - N_{x+n-1}}{D_x}\,. \tag{27}$$

Aus (27) folgt unter Benützung von (20) analog zu (24):

$$|_n\mathbf{a}_x = \mathbf{a}_x - \frac{D_{x+n}}{D_x}\,\mathbf{a}_{x+n}\,. \tag{27'}$$

Aus (26) und (22) oder auch aus der Definition von $|_n\mathbf{a}_x$ ergibt sich: $|_n\mathbf{a}_x = 1 + |_{n-1}a_x\,.$ (28)

Versichert sich eine $x$jährige Person auf eine alljährlich in gleicher Höhe auszuzahlende lebenslängliche Rente, deren erste Zahlung erst nach $m + 1$ Jahren, falls der Versicherte dann noch lebt, von der V'sanstalt zu leisten ist, so spricht man von einer um m Jahre aufgeschobenen, postnumerando zahlbaren Leibrente. Diese V. kann der Alterspension dienen. Die von der $x$jährigen Person einmalig zu zahlende Nettoprämie bezeichnet man, wenn sich die geschilderte V. auf die Einheit der Rente bezieht, mit $_{m|}a_x$ (XVI), indem man bei Ereignissen, die erst nach einer Aufschubzeit von m Jahren eintreten, hinter den vorgesetzten Index m einen Vertikalstrich setzt. Die erste Zahlung leistet das V'sunternehmen, falls der Versicherte dann noch lebt, am $x + m + 1$ten Geburtstage

(XVI)

des Versicherten; von da an sind die Bedingungen analog wie bei der in § 1 behandelten Leibrentenv.. Formel (13) modifiziert sich in:

$$_{m|}a_x = \frac{l_{x+m+1}\, v^{m+1} + l_{x+m+2}\, v^{m+2} + \dots + l_\omega\, v^{\omega - x}}{l_x} . \quad (29)$$

Formel (16) wird sich verwandeln in:

$$_{m|}a_x = \frac{D_{x+m+1} + D_{x+m+2} + \dots + D_\omega}{D_x} . \quad (30)$$

Formel (17) geht über in: $_{m|}a_x = \frac{N_{x+m}}{D_x}$. (31)

Die Formeln (23), (17) und (31) ergeben:

$$_{|m}a_x = a_x - {}_{m|}a_x \quad \text{oder} \quad {}_{|m}a_x + {}_{m|}a_x = a_x . \quad (32)$$

Formel (32) drückt aus: Die V. auf eine lebenslängliche Postnumerandoleibrente ist gleichwertig mit dem gleichzeitigen Abschluß einer $m$jährigen kurzen Postnumerandoleibrentenv. und einer um m Jahre aufgeschobenen, postnumerando zahlbaren Leibrentenv..

Formel (30) läßt sich auch schreiben:

$$_{m|}a_x = \frac{D_{x+m+1} + D_{x+m+2} + \dots + D_\omega}{D_{x+m}} \cdot \frac{D_{x+m}}{D_x}$$

$$= a_{x+m} \cdot \frac{D_{x+m}}{D_x} , \quad (33)$$

wie sich mit Hilfe von (16) ergibt.

Die eben geschilderte V. bezeichnet man auch anstatt einer um m Jahre aufgeschobenen, postnumerando zahlbaren Leibrentenv. als eine um $m + 1$ Jahre aufgeschobene Pränumerandoleibrentenv. Bei dieser Auffassung wird die einmalige Nettoprämie statt mit $_{m|}a_x$ mit $_{m+1|}\mathbf{a}_x$ (XVII) bezeichnet. Für Pränumerandoleibrenten verwendet man immer **a** (vgl. XIII, XV). (XVII)

Bisweilen läßt man auch bei der geschilderten V. das Wort pränumerando fort und spricht einfach von einer um $m+1$ Jahre aufgeschobenen Leibrentenv.

Nach Definition ist: $_{m|}a_x = {}_{m+1|}\mathbf{a}_x$, (34)
und a_x ist mit $_{1|}\mathbf{a}_x$ gleichbedeutend.

Versichert sich eine $x$jährige Person auf eine um m Jahre aufgeschobene, höchstens $n$mal, nur solange der Versicherte lebt, zur Auszahlung gelangende, postnumerando zahlbare Leibrente, so bezeichnet man in Analogie mit (XIV) und (XVI) die einmalige Nettoprämie, wenn die Höhe der
(XVIII) Leibrente die Einheit ist, mit $_{m|n}a_x$ (XVIII). Die V. heißt eine V. auf eine aufgeschobene, kurze oder aufgeschobene, temporäre Leibrente.

Die erste Zahlung der V'sanstalt findet statt, wenn der $x$jährige seinen $x+m+1$ten Geburtstag erlebt, die letzte mögliche Zahlung, wenn der Versicherte $x+m+n$ Jahre alt ist. Formel (13) bzw. (16) modifizieren sich in:

$$_{m|n}a_x = \frac{l_{x+m+1}v^{m+1} + l_{x+m+2}v^{m+2} + \ldots + l_{x+m+n}v^{m+n}}{l_x}, \quad (35)$$

$$_{m|n}a_x = \frac{D_{x+m+1} + D_{x+m+2} + \ldots + D_{x+m+n}}{D_x}. \quad (36)$$

Mit Hilfe von (XII) wird:

$$_{m|n}a_x = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x}. \quad (37)$$

Aus (31) und (37) folgt:

$$_{m|n}a_x = {}_{m|}a_x - {}_{m+n|}a_x\,. \quad (38)$$

In der Form: $_{m|}a_x = {}_{m|n}a_x + {}_{m+n|}a_x$ sieht man die Formel (38) ebenso wie Formel (32) leicht direkt ein.

In Analogie mit (XVII) kann man für $_{m|n}a_x$

auch die Bezeichnung ${}_{m+1|n}\mathrm{a}_x$ benützen. Die V. ist dann auch als eine um $m+1$ Jahre aufgeschobene, höchstens n malig (pränumerando) zahlbare Leibrentenv. zu bezeichnen. Die geschilderte V. kann z. B. vorsorglich von einem Vater abgeschlossen werden, der seinen Sohn studieren lassen und ihm für die Studienzeit ein jährliches Stipendium sichern will (Studienrente).

§ 4. Kapitalversicherung auf den Lebensfall.

Bei der Kapitalv. auf den Lebensfall, auch Erlebensfallv. oder Erlebensv. genannt, versichert sich ein x jähriger, daß er bei Vollendung des $(x+n)$ten Lebensjahres eine vertragsmäßig festgesetzte Summe erhalten soll; stirbt der Versicherte vor Erleben seines $x+n$ten Geburtstages, so erhält er nichts ausgezahlt. Die einmalige Nettoprämie des x jährigen für diese V. wird, falls die versicherte Summe die Einheit ist, mit ${}_nE_x$ (XIX) bezeichnet. (XIX)

Denken wir uns, daß eine fingierte Gesellschaft von l_x Personen, die nach der Sterblichkeitstafel aussterben möge, eine Erlebensv. auf die Summe 1 abschließt, so hat die V'sanstalt n Jahre nach Abschluß des Vertrages an jede der dann noch lebenden l_{x+n} Personen die Einheit zu zahlen; der Barwert dieser Leistung des V'sunternehmens ist bei Abschluß des Vertrages nach Formel (4): $l_{x+n}v^n$. Nach dem Prinzip der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung hat folglich die fingierte Gesellschaft bei Abschluß des Vertrages an die V'sanstalt die Summe $l_{x+n}v^n$ zu zahlen, die einzelne Person also $\frac{l_{x+n}}{l_x}v^n$. Es ist daher:

$${}_nE_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}v^n \tag{39}$$

oder vermöge (XI)
$$ {}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} . \tag{40} $$

Ein Vater, der seinem Sohn ein Kapital für die Kosten der Einjährigendienstzeit oder seiner Tochter eine Summe für eine angemessene Aussteuer sichern will, wird auf das Leben seiner Kinder eine solche V. abschließen; doch kann dieselbe auch der Vorsorge für die eigenen alten Tage dienen.

Bei allen bisher geschilderten V'en sind die Versicherten an ihrem langen Leben interessiert; nur gesunde und kräftige Personen werden V'en auf den Lebensfall abschließen. Als Sterblichkeitstafeln wird man daher solche mit geringen Sterbenswahrscheinlichkeiten, also Rentnersterbetafeln (vgl. S. 49), benützen. Eine Ausnahme kann man zulassen, wenn für eine Körperschaft eine zwangsweise Altersv. (Kollektivv.) eingeführt werden soll und man infolge fortfallender Auslese der V'snehmer nicht mit ihrer übermäßigen Langlebigkeit zu rechnen braucht.

§ 5. Einfache Versicherung auf den Todesfall.

Ein $x$jähriger versichert sich, daß die V'sanstalt bei seinem Tode an seine Erben die Summe 1 bezahlen soll. Die einmalige Nettoprämie für diese V. wird mit
(XX) A_x (XX) bezeichnet; bei der Herleitung der Formeln wird die Annahme gemacht, daß die versicherte Summe 1 von der V'sanstalt immer erst am Ende des V'sjahres, in welchem der Tod erfolgt, zur Auszahlung gelangt. Wir denken uns, daß eine fingierte Gesellschaft von l_x Personen des Alters x, wie sie die Sterblichkeitstafel angibt, eine V. eingeht, damit bei dem Tode einer jeden Person die Erben derselben die

Einheit erhalten. Nehmen wir an, daß unsere fingierte Gesellschaft nach der Sterblichkeitstafel abstirbt. Im Alter von x bis $x + 1$ Jahren sterben d_x Personen, an deren Erben die V'sunternehmung die Summe d_x zu zahlen hat; diese Summe kommt nach der hier gemachten Annahme erst ein Jahr nach Abschluß des Vertrages zur Auszahlung und hat daher zur Zeit des Abschlusses des Vertrages nach Formel (4) den Barwert $d_x \cdot v$. Im Alter von $x + 1$ bis $x + 2$ Jahren sterben d_{x+1} Personen unserer fingierten Gesellschaft, an deren Erben die V'sunternehmung die Zahlung d_{x+1} zu leisten hat; diese Summe gelangt gemäß Annahme erst am Schluß des zweiten V'sjahres zur Auszahlung; ihr Barwert ist daher bei Abschluß des Vertrages $d_{x+1} \cdot v^2$. Auf diese Art und Weise ist mit der Rechnung fortzufahren. Ist ω nach der Sterbetafel das höchste Lebensalter, so sterben im Alter von ω bis $\omega + 1$ Jahren alle Personen unserer fingierten Gesellschaft aus; an die Erben der im Alter ω bis $\omega + 1$ sterbenden Personen ist am Schluß des $\omega + 1 - x$ten V'sjahres die Summe d_ω von der V'sanstalt zu zahlen; der Barwert dieser Summe ist zur Zeit des Abschlusses des Vertrages $d_\omega \cdot v^{\omega+1-x}$. Durch Addition dieser Posten findet man diejenige Summe, deren Vorhandensein bei Abschluß des Vertrages die künftigen Zahlungen gewährleistet, nämlich:

$$d_x \cdot v + d_{x+1} v^2 + d_{x+2} v^3 + \ldots + d_\omega v^{\omega+1-x}.$$

Nach dem Prinzip der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung muß die fingierte Gesellschaft von l_x Personen an das V'sunternehmen die eben gefundene Summe als einmalige Nettoprämie einzahlen; eine Person zahlt mithin den $l_x$ten Teil.

Es ist daher:

$$A_x = \frac{d_x v + d_{x+1} v^2 + \ldots + d_\omega v^{\omega+1-x}}{l_x}. \tag{41}$$

Setzt man nach (VI) $d_x = l_x - l_{x+1}$, so wird:

$$A_x = \frac{(l_x - l_{x+1}) v + (l_{x+1} - l_{x+2}) v^2 + \ldots + (l_\omega - l_{\omega+1}) v^{\omega+1-x}}{l_x}$$

$$= \frac{v\, l_x + v^2 l_{x+1} + v^3 l_{x+2} + \ldots + l_\omega v^{\omega+1-x}}{l_x}$$

$$- \frac{v l_{x+1} + v^2 l_{x+2} + v^3 l_{x+3} + \ldots + l_\omega v^{\omega-x} + l_{\omega+1} v^{\omega+1-x}}{l_x}.$$

Beachtet man Formel (13) und setzt $l_{\omega+1} = 0$, da ja alle Personen der Sterblichkeitstafel im Alter ω bis $\omega + 1$ aussterben, so wird:

$$A_x = v + v \cdot a_x - a_x = 1 + (v - 1) + (v - 1) a_x$$

$$= 1 + (v - 1)(a_x + 1) \tag{42}$$

oder nach (19): $A_x = 1 + (v - 1) \mathbf{a}_x$. (42′)

Formel (42) gestattet bequem, A_x und a_x zu berechnen. Bestimmt man A_x nach Formel (42), so ist natürlich a_x — die einmalige Nettoprämie einer Postnumerandoleibrentenv. — in diesem Falle nicht auf Grund einer Sterblichkeitstafel für Leibrentenv'en, sondern einer solchen für Todesfallv'en zu berechnen.

(XXI) Man setzt $C_x = d_x \cdot v^{x+1}$ (XXI) und nennt C_x die Zahl der diskontierten Toten des Alters x. C_x ist deswegen als Bezeichnung gewählt, weil der Buchstabe C dem D im Alphabet voraufgeht und D_x die Zahl der diskontierten Lebenden des Alters x war. Man beachte aber, daß C_x im Gegensatz zu (XI) rechter Hand v^{x+1} als Faktor des d_x hat.

Man definiert

$$M_x = C_x + C_{x+1} + \ldots + C_\omega \quad \text{(XXII)}.$$ (XXII)

M ist als der dem N voraufgehende Buchstabe gewählt (vgl. XII); doch beachte man, daß M_x eine Summe von $\omega + 1 - x$, N_x nur eine solche von $\omega - x$ Summanden ist. Formel (41) geht, wenn man Zähler und Nenner mit v^x gliedweise multipliziert und (XI) und (XXI) beachtet, in:

$$A_x = \frac{C_x + C_{x+1} + \ldots + C_\omega}{D_x} \tag{43}$$

über. Benützt man (XXII), so wird (43):

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}\,. \tag{44}$$

Für die Rechnungen von Todesfallv'en hat man gewöhnlich D_x, C_x und M_x tabuliert. Die Berechnung von M_x geschieht am einfachsten rekurrent, mit $M_\omega = C_\omega$ beginnend, indem man die Relation $M_x = C_x + M_{x+1}$ beachtet.

Aus (41) folgt:

$$A_x = v\,\frac{d_x}{l_x}\left(1 + \frac{d_{x+1}\,v + d_{x+2}\,v^2 + \ldots + d_\omega\,v^{\omega-x}}{d_x}\right). \tag{45}$$

Beachtet man, daß nach (41):

$$A_{x+1} = \frac{d_{x+1}\,v + d_{x+2}\,v^2 + \ldots + d_\omega\,v^{\omega-x}}{l_{x+1}}\,,$$

so geht (45) über in:

$$A_x = v\,\frac{d_x}{l_x}\left(1 + \frac{l_{x+1}}{d_x}\,A_{x+1}\right) = \frac{v}{l_x}\,(d_x + l_{x+1}\,A_{x+1})\,. \tag{46}$$

Formel (46) kann in genau analoger Weise wie Formel (14) auch direkt bewiesen werden.

Führt man in (46) nach (VII) und (VIII) $p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$, $q_x = \frac{d_x}{l_x}$ ein, so erhält man:

$$A_x = v(q_x + p_x A_{x+1}) \,. \qquad (47)$$

Da alle ωjährigen Personen der Sterbetafel im Alter ω bis $\omega + 1$ sterben, so ist offenbar $p_\omega = 0$ und für $x = \omega$ wird (47):

$$A_\omega = v\, q_\omega \,. \qquad (48)$$

Formel (47) gestattet, für jeden ganzzahligen Wert des x das A_x zu finden, wenn A_{x+1} bekannt ist. Nach (48) ist A_ω bekannt; man kann daher zunächst $A_{\omega-1}$, dann $A_{\omega-2}$ usw. der Reihe nach bestimmen.

Für den Zinsfuß $3^1/_2$%, also $v = \frac{1}{1{,}035}$, und die Sterblichkeitstafel 23 D. G. M u. W I wird:

$$A_{25} = 0{,}33088, \quad A_{30} = 0{,}36320,$$
$$A_{40} = 0{,}44357, \quad A_{50} = 0{,}54286,$$
$$A_{60} = 0{,}65353, \quad A_{70} = 0{,}76148.$$

Ein dreißigjähriger Mann, der sich auf eine bei seinem Tode zahlbare Sterbesumme von 10 000 Mk. versichern will, hat bei den angegebenen Grundlagen 3632,00 Mk. als einmalige Nettoprämie zu zahlen. Da für 23 D. G. M u. W I $\omega = 89$ ist, so zahlen die meisten nach diesen Tafeln rechnenden Institute, falls der Tod des Versicherten nicht früher eintritt, die versicherte Summe am 90. Geburtstage.

Die einmalige Prämienzahlung ist für eine einfache V. auf den Todesfall nicht sehr gebräuchlich, da sie bei einer größeren versicherten Summe zu hoch ist. Das System der einmaligen Prämienzahlung ist für die kleinen Summen der Volksv. empfohlen und von den katholischen Arbeitervereinen in Deutschland und dem allgemeinen deutschen V'sverein in Stuttgart in die Praxis umgesetzt worden. (System Hitze. Vgl. Zeitschr.

f. d. gesamte Versicherungswissenschaft, Bd. 2, S. 134.) Auch das bei einer Reihe von V'sanstalten eingeführte sogenannte *Bonussystem* beruht auf dem Prinzip einmaliger Prämienzahlung. Die einem mit Gewinnanteil Versicherten zufallende Jahresdividende wird diesem nicht ausgehändigt, sondern als einmalige Einzahlung für eine Nachv. angesehen, um die ursprünglich versicherte Summe zu erhöhen.

§ 6. Temporäre und gemischte Versicherung auf den Todesfall.

Versichert sich eine $x$jährige Person auf eine Summe, die die V'sanstalt nur auszuzahlen hat, wenn der Tod der versicherten Person innerhalb der nächsten n Jahre nach Abschluß des Vertrages eintritt, so spricht man von einer *$n$jährigen, temporären* oder *kurzen* oder *ablaufenden* V. auf den Todesfall. Die einmalige von dem Versicherten zu zahlende Nettoprämie wird, falls die versicherte Summe 1 ist, mit $|_n A_x$ (analog dem $|_n a_x$) (XXIII) bezeichnet. Die V'sgesellschaft hat bei (XXIII)
dieser Art der V. genau dieselben Leistungen wie bei der einfachen V. auf den Todesfall übernommen; nur erhalten hier die Erben, falls der $x$jährige seinen $x+n$ten Geburtstag erlebt, nichts ausgezahlt. Die Formeln (41) und (43) gehen daher über in:

$$|_n A_x = \frac{d_x v + d_{x+1} v^2 + \ldots + d_{x+n-1} v^n}{l_x}, \qquad (49)$$

$$|_n A_x = \frac{C_x + C_{x+1} + \ldots + C_{x+n-1}}{D_x}. \qquad (50)$$

Vermöge (XXII) wird:

$$|_n A_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} \qquad (51)$$

oder

$$|_nA_x = \frac{M_x}{D_x} - \frac{M_{x+n}}{D_{x+n}} \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x} = A_x - \frac{D_{x+n}}{D_x} A_{x+n}\,; \quad (52)$$

denn nach (44) ist $A_x = \frac{M_x}{D_x}$.

Versichert sich ein $x$jähriger derartig, daß das versicherte Kapital, wenn der Versicherte innerhalb der nächsten n Jahre nach Abschluß des Vertrages stirbt, den Erben[1]), wenn der Versicherte hingegen $x+n$ Jahre alt wird, an seinem $x+n$ten Geburtstage ihm selbst ausgezahlt wird, so spricht man von einer gemischten oder alternativen V. auf den Todesfall, auch von einer V. auf Todes- und Lebensfall oder einer V. mit abgekürzter V'sdauer. Diese V. dient der Sicherstellung der Hinterbliebenen bei frühzeitigem Tode sowie der eigenen Altersversorgung. Sie ist Kombination der temporären V. auf den Todesfall mit der Erlebensv., also neben Todesfallv. Pensions- und Aussteuerv.. Ist die versicherte Summe die Einheit, so bezeichnet man die einmalige Nettoprämie für diese
(XXIV) gemischte V. mit $A_{x\overline{n}|}$ (XXIV); offenbar ist $A_{x\overline{n}|}$ die Summe der einmaligen Nettoprämie für eine $n$jährige kurze V. auf den Todesfall und der einmaligen Nettoprämie der Erlebensv. des $x$jährigen auf das Alter $x+n$; daher wird:

$$A_{x\overline{n}|} = |_nA_x + {}_nE_x\,. \quad (53)$$

Wegen Formel (53) bezeichnet man $A_{x\overline{n}|}$ bisweilen auch mit $|_n Æ_x$. Mit Hilfe von (49) und (39) geht (53)

[1]) Für die Berechnung wird wie auf S. 66 die Annahme gemacht, daß die versicherte Summe am Schlusse des V'sjahres, in dem der Tod eingetreten ist, ausgezahlt wird.

über in:

$$A_{x\overline{n}|} = \frac{d_x v + d_{x+1} v^2 + \ldots + d_{x+n-1} v^n + l_{x+n} v^n}{l_x}. \quad (54)$$

Nach (50) und (40) bzw. (51) und (40) geht (53) über in:

$$A_{x\overline{n}|} = \frac{C_x + C_{x+1} + \ldots + C_{x+n-1} + D_{x+n}}{D_x}$$

$$= \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}. \quad (55)$$

Durch (52) und (40) geht (53) über in:

$$A_{x\overline{n}|} = A_x - \frac{D_{x+n}}{D_x} A_{x+n} + \frac{D_{x+n}}{D_x} = A_x - \frac{D_{x+n}}{D_x}(A_{x+n} - 1). \quad (56)$$

Hat man A_x für alle Werte des x tabuliert, so ist $A_{x\overline{n}|}$ leicht nach (56) zu berechnen.

Beachtet man, daß $d_{x+n-1} = l_{x+n-1} - l_{x+n}$ und daher $d_{x+n-1} + l_{x+n} = l_{x+n-1}$ ist, so geht Formel (54) über in:

$$A_{x\overline{n}|} = \frac{d_x v + d_{x+1} v^2 + \ldots + d_{x+n-2} v^{n-1} + l_{x+n-1} v^n}{l_x}. \quad (57)$$

Vergleicht man (57) mit dem durch Formel (41) gegebenen A_x, so folgt: $A_{x\overline{n}|}$ kann auch als einmalige Nettoprämie einer einfachen V. auf den Todesfall angesehen werden, bei der eine fingierte Sterbetafel verwandt wird, welche bis zum Alter $x + n - 1$ genau dieselbe Absterbeordnung wie die wirkliche Sterbetafel aufweist; im Alter $x + n - 1$ bis $x + n$ aber sterben alle l_{x+n-1} das $x + n - 1$te Lebensjahr überlebenden Personen.

Setzt man in Formel (57) $d_x = l_x - l_{x+1}$, $d_{x+1} = l_{x+1} - l_{x+2}$ usw., so erhält man:

$$A_{x\overline{n}|} = \frac{(l_x - l_{x+1})v + (l_{x+1} - l_{x+2})v^2 + \ldots}{l_x}$$
$$\frac{+ (l_{x+n-2} - l_{x+n-1})v^{n-1} + l_{x+n-1}v^n}{l_x}$$
$$= \frac{l_x v + l_{x+1}v^2 + l_{x+2}v^3 + \ldots + l_{x+n-1}v^n}{l_x}$$
$$- \frac{l_{x+1}v + l_{x+2}v^2 + \ldots + l_{x+n-1}v^{n-1}}{l_x}$$
$$= v + v\left(\frac{l_{x+1}v + l_{x+2}v^2 + \ldots + l_{x+n-1}v^{n-1}}{l_x}\right)$$
$$- \frac{l_{x+1}v + l_{x+2}v^2 + \ldots + l_{x+n-1}v^{n-1}}{l_x}$$
$$= v + v \cdot {}_{|n-1}a_x - {}_{|n-1}a_x = v + (v-1) \cdot {}_{|n-1}a_x$$
$$= 1 + v - 1 + (v-1)\,{}_{|n-1}a_x$$
$$= 1 + (v-1)({}_{|n-1}a_x + 1) \qquad (58)$$

oder nach (28)

$$A_{x\overline{n}|} = 1 + (v-1)\,{}_{|n}\mathbf{a}_x\,. \qquad (58')$$

Formel (58) ist analog wie Formel (42) gebaut; bei der Herleitung von (58) ist (21) benützt worden.

In genau derselben Weise wie man aus (41) die Formel (47) herleitet, findet man aus (54):

$$A_{x\overline{n}|} = v\,(q_x + p_x\,A_{x+1\,\overline{n-1}|})\,. \qquad (59)$$

§ 7. Versicherung auf den Todesfall mit Karenzzeit.

Schließt eine $x$jährige Person eine Todesfallv. auf ein Kapital ab, das die V'sgesellschaft nur dann auszuzahlen hat, wenn der Tod des Versicherten nicht innerhalb der dem Abschluß des Vertrages unmittelbar folgenden m Jahre eintritt, so spricht man von einer V.

auf den Todesfall mit *m*jähriger Karenzzeit oder auch von einer um *m* Jahre aufgeschobenen V. auf den Todesfall. Ist das versicherte Kapital die Einheit, so bezeichnet man (vgl. Bezeichnung XVI) die einmalige Nettoprämie für diese V. mit $_{m|}A_x$ (XXV). (XXV)
Das versicherte Kapital gelangt nur dann zur Auszahlung, wenn der Versicherte im Alter $x + m$ bis $x + m + 1$ oder in höherem Lebensalter stirbt. Formel (41) modifiziert sich daher in:

$$_{m|}A_x = \frac{d_{x+m}\, v^{m+1} + d_{x+m+1}\, v^{m+2} + \ldots + d_\omega\, v^{\omega+1-x}}{l_x} \tag{60}$$

und Formel (43) in:

$$_{m|}A_x = \frac{C_{x+m} + C_{x+m+1} + \ldots + C_\omega}{D_x}. \tag{61}$$

Infolge der in (XXII) gegebenen Definition von M_x folgt aus (61):

$$_{m|}A_x = \frac{M_{x+m}}{D_x}. \tag{62}$$

Aus (62), (51) und (44) ergibt sich:

$$_{m|}A_x + {}_{|m}A_x = A_x .$$

Diese Relation ist auch aus der Definition der Größen unmittelbar klar.

Eine *x*jährige Person kann auch eine um *m* Jahre aufgeschobene V. auf den Todesfall eingehen, bei der die Erben die Sterbesumme nur dann erhalten sollen, wenn der Tod in den der *m*jährigen Karenzzeit unmittelbar folgenden *n* Jahren eintritt. Ist die versicherte Summe 1, so bezeichnet man die einmalige Nettoprämie in Analogie mit (XVIII) durch $_{m|n}A_x$ (XXVI). (XXVI)
Es wird:

$$_{m|n}A_x = \frac{d_{x+m}v^{m+1} + d_{x+m+1}v^{m+2} + \ldots + d_{x+m+n-1}v^{m+n}}{l_x},$$

$${}_{m|n}A_x = \frac{C_{x+m} + C_{x+m+1} + \ldots + C_{x+m+n-1}}{D_x},$$

$${}_{m|n}A_x = \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x},$$

$${}_{m|}A_x = {}_{m|n}A_x + {}_{m+n|}A_x .$$

Diese Formeln sind die Analoga zu (60)—(62).

Die V'en mit Karenzzeit sind eine Schutzeinrichtung der V'sanstalten, um bei der V. minderwertiger oder ärztlich nicht untersuchter Leben (Volksv.) den Zufluß gesundheitlich besonders gefährdeter Personen möglichst fernzuhalten.

§ 8. Todesfallversicherung mit unmittelbarer Auszahlung nach dem Ableben.

Bei der einfachen Todesfallv. im § 5, sowie auch bei den in den folgenden Paragraphen behandelten V'en auf den Todesfall machten wir die Annahme, daß die versicherte Summe erst immer am Schlusse des V'sjahres, in dem der Tod eingetreten ist, zur Auszahlung gelangt (vgl. S. 66). Die meisten V'sanstalten zahlen unmittelbar nach dem Tode, sobald die nötigen amtlichen Papiere vorgelegt sind. Trotzdem wird bei deutschen Lebensv'sanstalten in der Praxis meistens A_x für die einmalige Nettoprämie verwandt. Korrekter ist es, auch bei den Prämienberechnungen die sofortige Auszahlung zu berücksichtigen. Man kann dies, indem man die Todesfälle durchschnittlich auf die Mitte des V'sjahres verlegt.

Nehmen wir wieder wie auf S. 66 eine fingierte Gesellschaft von l_x Personen an, von denen, wie die Absterbeordnung angibt, im ersten V'sjahre d_x, im zweiten V'sjahre d_{x+1} Personen usw. sterben. Beim

Tode jedes Versicherten habe die V'sgesellschaft die Einheit als Sterbesumme zu zahlen. Die Summe d_x, welche die Erben der im ersten V'sjahre sterbenden Personen erhalten, gelangt durchschnittlich $^1/_2$ Jahr nach Abschluß des Vertrages zur Auszahlung; diese Summe hat daher zur Zeit des Abschlusses des Vertrages den Wert $d_x \cdot v^{\frac{1}{2}}$. (Vgl. S. 24). Die Sterbesummen für die im zweiten V'sjahre sterbenden d_{x+1} Personen gelangen durchschnittlich $1^1/_2$ Jahre nach Abschluß des Vertrages zur Auszahlung und haben daher zur Zeit des Abschlusses des Vertrages den Wert $d_{x+1} v^{\frac{3}{2}}$. Auf diese Weise geht es weiter. Nach der hier gemachten Annahme über die Art der Auszahlung kann die V'sgesellschaft ihren künftigen Verpflichtungen nachkommen, wenn sie zur Zeit des Abschlusses des Vertrages über die Summe

$$d_x v^{\frac{1}{2}} + d_{x+1} v^{\frac{3}{2}} + \ldots + d_\omega v^{\omega + \frac{1}{2} - x}$$

verfügt. Hieraus ergibt sich durch Division mit l_x die einmalige Nettoprämie, die ein $x$jähriger zu zahlen hat, als

$$\overline{A}_x = \frac{d_x v^{\frac{1}{2}} + d_{x+1} v^{\frac{3}{2}} + d_{x+2} v^{\frac{5}{2}} + \ldots + d_\omega v^{\omega + \frac{1}{2} - x}}{l_x}. \quad (63)$$

Bei V'swerten, die unter der Annahme hergeleitet sind, daß im Fall des Todes sofortige Auszahlung stattfindet, setzt man, wie es bei $\overline{A}_x$ (XX′) geschah, über die Symbole einen wagerechten Strich. Vergleicht man (63) mit (41), so folgt: (XX′)

$$\overline{A}_x = \frac{A_x}{v^{\frac{1}{2}}} = A_x \sqrt{1+i}\,; \quad (64)$$

denn nach (II) ist
$$v = \frac{1}{1+i}.$$

Analog zu den durch (XXI) und (XXII) eingeführten

diskontierten Zahlen C_x und M_x definiert man unter der Annahme sofortiger Auszahlung im Falle des Todes:

(XXI′) $$\overline{C}_x = d_x \cdot v^{x+\frac{1}{2}} \quad \text{(XXI′)}$$

(XXII′) und $$\overline{M}_x = \overline{C}_x + \overline{C}_{x+1} + \overline{C}_{x+2} + \ldots + \overline{C}_\omega \quad \text{(XXII′)}.$$

Multipliziert man Zähler und Nenner von (63) mit v^x, so erhält man analog zu (43) und (44):

$$\overline{A}_x = \frac{\overline{C}_x + \overline{C}_{x+1} + \ldots + \overline{C}_\omega}{D_x} \tag{65}$$

und

$$\overline{A}_x = \frac{\overline{M}_x}{D_x}. \tag{66}$$

In Analogie mit (64) findet man für die Nettoprämie bei der temporären und aufgeschobenen Todesfallv. unter der Annahme unmittelbarer Auszahlung nach dem Ableben

$$|_n\overline{A}_x = |_nA_x \cdot \sqrt{1+i} \quad \text{bzw.} \quad {}_{n|}\overline{A}_x = {}_{n|}A_x \cdot \sqrt{1+i}\,.$$

Will man bei der einmaligen Nettoprämie $A_{x\overline{n}|}$ für die abgekürzte V. auf den Todesfall infolge unmittelbarer Auszahlung nach dem Ableben eine Korrektur einführen, so beachte man, daß in (53) nur $|_nA_x$, nicht aber ${}_nE_x$, das sich auf einen festen Termin bezieht, mit dem Faktor $\sqrt{1+i}$ zu multiplizieren ist. Formeln (53)—(55) modifizieren sich in:

$$\overline{A}_{x\overline{n}|} = |_nA_x\sqrt{1+i} + {}_nE_x$$

$$= \frac{d_xv^{\frac{1}{2}} + d_{x+1}v^{\frac{3}{2}} + d_{x+2}v^{\frac{5}{2}} + \ldots + d_{x+n-1}v^{n-\frac{1}{2}} + l_{x+n}v^n}{l_x} \tag{67}$$

$$= \frac{\overline{C}_x + \overline{C}_{x+1} + \ldots + \overline{C}_{x+n-1} + D_{x+n}}{D_x}$$

$$= \frac{\overline{M}_x - \overline{M}_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}. \tag{68}$$

Derartige Formeln verwendet z. B. die Gothaer Lebensv'sbank, nur legt sie ihren Berechnungen Selektionssterbetafeln zugrunde. Will man das Quadratwurzelzeichen vermeiden, so kann man auch statt $A_x\sqrt{1+i}$, wie Formel (64) angibt, $A_x\left(1+\frac{i}{2}\right)$ als erhöhte einmalige Nettoprämie nehmen, um der unmittelbaren Auszahlung nach dem Todesfall Rechnung zu tragen. Zu diesem Wert gelangt man auf folgende Weise: Aus (41) folgt die Formel

$$\frac{A_x}{v} = A_x(1+i) = \frac{d_x + d_{x+1}v + \ldots + d_\omega v^{\omega-x}}{l_x},$$

mit der zu rechnen alter französischer Brauch[1]) war. Die Formel $A_x(1+i)$ beruht auf der Annahme, daß alle Todesfälle schon bei Beginn des V'sjahres eintreten, während die Benützung von A_x voraussetzt, daß die Auszahlung der Sterbesummen immer erst am Ende des V'sjahres, in dem der Tod eintritt, stattfindet. Der Mittelwert von A_x und $A_x(1+i)$ führt auf $A_x\left(1+\frac{i}{2}\right)$ Es ist

$$A_x\left(1+\frac{i}{2}\right) > A_x\sqrt{1+i}\,.$$

Für $3^1/_2\,\%$ wird $\sqrt{1+i} = \sqrt{1{,}035} = 1{,}01735$ und $1+\frac{i}{2} = 1{,}0175$.

Auch die anderen Nettoprämien für Todesfallv'en kann man, wenn man die Quadratwurzel vermeiden will, dadurch korrigieren, daß man $1+\frac{i}{2}$ für $\sqrt{1+i}$ setzt.

[1]) Dieser Gebrauch ist jetzt in Frankreich aufgegeben; man macht dort heute meistens die Annahme, daß der Auszahlungstermin durchschnittlich in die Mitte des V'sjahres fällt. (Ber. d. Eidgenöss. V'samtes über das Jahr 1893, S. 21.)

§ 9. Terminliche Leibrente.

Bei den bisher behandelten V'en sollte das V's-institut das versicherte Kapital entweder einmalig oder alljährlich in gleicher Höhe auszahlen. Bei Leibrenten findet häufig auch die Auszahlung in kürzeren als jährlichen Terminen statt. Wir nehmen an: eine $x$jährige Person versichert sich bei einer Rentenanstalt, daß sie alle $\frac{1}{m}$tel Jahre bis zu ihrem Tode eine Leibrente in der gleichen Höhe von $\frac{1}{m}$ ausgezahlt erhalten soll. Hat die erste Auszahlung sogleich bei Abschluß des Vertrages zu beginnen, so bezeichnet man die einmalige Netto-
(XXVII) prämie in Analogie mit (XIII) durch $\mathbf{a}_x^{(m)}$ (XXVII). Der Versicherte erhält, wie man sagt, die Leibrente ratenweise oder in Terminen ausgezahlt; man spricht auch von einer Pränumerandoleibrente von unterjähriger Fälligkeit. In der Praxis wird meistens $m = 2$ und $m = 4$, d. h. die halb- und vierteljährliche Auszahlung, gewählt.

Wir wollen für $\mathbf{a}_x^{(m)}$ eine Näherungsformel ableiten, die sich einfach finden läßt und am häufigsten praktisch verwendet wird. Wir verfahren auf folgende Art: Die einmalige Nettoprämie für eine lebenslängliche, alljährlich in Höhe der Einheit, pränumerando zahlbare Leibrente ist $\mathbf{a}_x$ (vgl. § 2); hingegen beträgt nach Formel (19) die einmalige Nettoprämie für eine lebenslängliche, alljährlich in Höhe der Einheit postnumerando zahlbare Leibrente $a_x = \mathbf{a}_x - 1$. Die Differenz zwischen beiden Rentenwerten ist 1. Wir nehmen an, daß der Übergang des Barwertes der Pränumerandoleibrente in den Barwert der Postnumerandoleibrente, deren erste Zahlung ein Jahr später als bei der Pränumerandoleibrente

erfolgt, proportional der Zeit vor sich geht. Nach unserer Annahme ist also für eine Leibrente in Höhe der Einheit, die zum ersten Male $\frac{f}{m}$ Jahresteile nach Abschluß des Vertrages und dann stets ein Jahr später, solange der Versicherte diese Termine erlebt, zur Auszahlung gelangt, $\mathbf{a}_x - \frac{f}{m}$ als einmalige Nettoprämie zu zahlen; f bedeutet dabei irgendeine der ganzen positiven Zahlen von 0 bis m. Addiert man die Leibrentenwerte $\mathbf{a}_x$, $\mathbf{a}_x - \frac{1}{m}$, $\mathbf{a}_x - \frac{2}{m}$, $\mathbf{a}_x - \frac{3}{m}$, ... $\mathbf{a}_x - \frac{m-1}{m}$, von denen sich der erste auf eine sofort, der zweite auf eine nach $\frac{1}{m}$tel Jahr beginnende usw., der letzte schließlich auf eine nach $\frac{m-1}{m}$tel Jahren beginnende Jahresleibrente beziehen, so erhält man die einmalige Nettoprämie für eine Leibrente, welche, bei Abschluß des Vertrages beginnend, jedes $\frac{1}{m}$tel Jahr in Höhe der Einheit, solange der Versicherte lebt, zur Auszahlung gelangt. Es ist:

$$\mathbf{a}_x + \mathbf{a}_x - \frac{1}{m} + \mathbf{a}_x - \frac{2}{m} + \mathbf{a}_x - \frac{3}{m} + \dots \mathbf{a}_x - \frac{m-1}{m}$$

$$= m\,\mathbf{a}_x - \frac{1}{m} - \frac{2}{m} \dots - \frac{m-1}{m}$$

$$= m\,\mathbf{a}_x - \frac{1}{m}(1 + 2 + \dots + m - 1)$$

$$= m\,\mathbf{a}_x - \frac{1}{m}\,\frac{m(m-1)}{2} = m\,\mathbf{a}_x - \frac{m-1}{2}.$$

$m\,\mathbf{a}_x - \frac{m-1}{2}$ ist die einmalige Nettoprämie für eine sofort beginnende, alle $\frac{1}{m}$tel Jahre fällige Rente 1. Die einmalige Nettoprämie für eine sofort beginnende, alle $\frac{1}{m}$tel Jahre zur Auszahlung gelangende Leibrente in Höhe $\frac{1}{m}$ ist daher der $m$te Teil von $m\,\mathbf{a}_x - \frac{m-1}{2}$; folglich wird:

$$\mathbf{a}_x^{(m)} = \mathbf{a}_x - \frac{m-1}{2\,m}. \tag{69}$$

Versichert sich ein $x$jähriger auf eine sofort beginnende Leibrente, die ihm lebenslänglich alle Vierteljahre in der Höhe der Einheit ausgezahlt werden soll, so beträgt die zu entrichtende einmalige Nettoprämie

$$4\,\mathbf{a}_x^{(4)} = 4\left(\mathbf{a}_x - \frac{3}{8}\right).$$

Hat bei terminlicher Zahlungsweise die V'sanstalt die erste Rentenzahlung nicht sofort, sondern erst $\frac{1}{m}$tel Jahr nach Abschluß des Vertrages zu leisten, so spricht man von einer p o s t n u m e r a n d o z a h l b a r e n t e r m i n l i c h e n oder u n t e r j ä h r i g e n L e i b r e n t e. Gelangt jedes $\frac{1}{m}$tel Jahr die Summe $\frac{1}{m}$ zur Auszahlung, so wird die einmalige Nettoprämie in Analogie mit (X) durch $a_x^{(m)}$ bezeichnet; es ist offenbar

$$a_x^{(m)} = \mathbf{a}_x^{(m)} - \frac{1}{m}. \tag{70}$$

Als einmalige Nettoprämie $_{|n}\mathbf{a}_x^{(m)}$ für eine n j ä h r i g e t e m p o r ä r e P r ä n u m e r a n d o l e i b r e n t e von unter-

jähriger Fälligkeit, die, bei Abschluß des Vertrages beginnend, jedes $m$tel Jahr in der Höhe $\frac{1}{m}$ zur Auszahlung gelangen soll, leitet man aus Formel (27′) ab:

$$|_n\mathrm{a}_x^{(m)} = \mathrm{a}_x^{(m)} - \frac{D_{x+n}}{D_x}\,\mathrm{a}_{x+n}^{(m)} .$$

Unter Verwendung von Formel (69) erhält man:

$$|_n\mathrm{a}_x^{(m)} = \mathrm{a}_x - \frac{m-1}{2\,m} - \frac{D_{x+n}}{D_x}\left(\mathrm{a}_{x+n} - \frac{m-1}{2\,m}\right)$$

$$= \mathrm{a}_x - \frac{D_{x+n}}{D_x}\,\mathrm{a}_{x+n} - \frac{m-1}{2\,m}\left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right)$$

$$= |_n\mathrm{a}_x - \frac{m-1}{2\,m}\left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x}\right). \tag{71}$$

Bei dem Endresultat wurde nochmals Formel (27′) benützt.

§ 10. Versicherung mit veränderlicher Auszahlung.

Bisher nahmen wir stets an, daß die Höhe der zur Auszahlung gelangenden versicherten Summe nicht von dem Zeitpunkt der Auszahlung abhängen soll. Diese Annahme wird auch im folgenden stets beibehalten; nur in diesem Paragraphen, sowie im Kap. V, § 2 behandeln wir V'en, bei welchen sich die Höhe der Auszahlung mit der Zeit ändert. Eine $x$jährige Person versichert sich, daß, wenn sie im Alter von x bis $x+1$ Jahren stirbt, die Summe S_1, wenn sie im Alter von $x+1$ bis $x+2$ Jahren stirbt, die Summe S_2 usw., wenn sie im Alter von $x+n-1$ bis $x+n$ Jahren stirbt, die Summe S_n an ihre Erben zur Auszahlung gelangt, wenn sie das $x+n$te Lebensjahr erlebt, sie selbst

die Summe S erhält. Nimmt man an, daß eine fingierte Gesellschaft von l_x Personen, die nach der Sterbetafel abstirbt, diese V. abschließt, so würden sich alle künftigen Ausgaben des V'sinstituts aus einer Summe in der Höhe von

$$S_1 d_x v + S_2 d_{x+1} v^2 + S_3 d_{x+2} v^3 + \ldots + S_n d_{x+n-1} v^n + S l_{x+n} v^n$$

bestreiten lassen. Dies ergibt sich aus dem Ansatz in § 5 in Analogie mit dem Zähler der Formel (54); hierbei ist der Auszahlungstermin für alle fälligen Sterbesummen immer auf den Schluß des V'sjahres verlegt.

Verteilt man die gefundene Summe auf die l_x Personen, so erhält man:

$$\frac{S_1 d_x v + S_2 d_{x+1} v^2 + S_3 d_{x+2} v^3 + \ldots + S_n d_{x+n-1} v^n + S l_{x+n} v^n}{l_x}. \quad (72)$$

Nach dem Prinzip der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung stellt (72) die einmalige Nettoprämie für die geschilderte gemischte Todesfallv. mit variabler Auszahlung dar. Durch Multiplikation von Zähler und Nenner mit v^x und Einführung von $C_x = d_x v^{x+1}$ (XXI) und $D_x = l_x v^x$ (XI) nimmt (72) die Form an:

$$\frac{S_1 C_x + S_2 C_{x+1} + S_3 C_{x+2} + \ldots + S_n C_{x+n-1} + S D_{x+n}}{D_x}. \quad (73)$$

$S_1 = S_2 = \ldots = S_n = 1$ ergibt die Formeln (54) bzw. (55).

Für die Praxis wichtig ist auch die Annahme

$S_2 = 2 S_1$, $S_3 = 3 S_1$, $S_4 = 4 S_1$, $\ldots$ $S_n = n S_1$, $S = n S_1$;

die Formel (73) geht über in:

$$S_1 \cdot \frac{C_x + 2 C_{x+1} + 3 C_{x+2} + \ldots + n C_{x+n-1} + n D_{x+n}}{D_x}. \quad (74)$$

IV. Kapitel.

Jährliche, gleichbleibende Prämienzahlung.

§ 1. Zurückführung der jährlichen Prämien auf die Zahlung der einmaligen Prämie.

Gewöhnlich übersteigt die Bezahlung einer einmaligen Prämie die finanziellen Kräfte der V'slustigen; sie ziehen es daher vor, V'en mit wiederholter Prämienzahlung, die dann kleiner ausfällt, abzuschließen. Die in der Praxis gewöhnlich vorkommenden Fälle sind, daß der Versicherte (a) lebenslänglich oder (b) während eines Zeitraumes von t Jahren, natürlich bei seinem früheren Tode aufhörend, alljährlich dieselbe gleichbleibende Prämienzahlung leistet. Ist die versicherte Summe oder Rente die Einheit, so bezeichnet man die jährlich gleichbleibende Nettoprämie, die der Versicherte zu zahlen hat, mit P (XXVIII). Wir können offenbar (XXVIII
annehmen, daß der Versicherte erstmalig die Summe P bei Abschluß des Vertrages zahlt; denn die V'sanstalt hat kein Interesse, ohne eine erste Anzahlung erhalten zu haben, den Vertrag in Kraft treten zu lassen.

Um P zu finden, kann man sich das V'sinstitut als Rentenempfänger, den Versicherten als Rentenzahler vorstellen. $\mathbf{a}$ bezeichne die Nettoprämie für eine Leibrente einer $x$jährigen Person, die erstmalig bei Abschluß des V'svertrages und hierauf, ebenso wie dieser es für die Prämienzahlungen vorschreibt, alljährlich in der Höhe der Einheit entweder (a) lebenslänglich oder (b) solange der Versicherte lebt, jedoch höchstens t mal, zur Auszahlung gelangt. Alsdann besitzen die von dem Versicherten an die V'sanstalt vertragsmäßig jährlich zu zahlenden Prämien P zur Zeit des Abschlusses des Vertrages den Wert $P\mathbf{a}$; denn diese Summe ist die

einmalige Ablösungssumme (vgl. S. 60), durch die sich der Versicherte von der wiederholten jährlichen Zahlung der Summe P befreien könnte.

Unter A wollen wir die einmalige Nettoprämie verstehen, die der Versicherte zu zahlen hätte, um die Summe oder Rente 1 zu erwerben, welche er durch wiederholte jährliche Zahlungen P erlangt. Nun muß es gleich sein, ob der Versicherte an die V'sanstalt einmalig die Summe A oder wiederholt die Summe P, die bei Abschluß des Vertrages den Wert $P\mathbf{a}$ repräsentiert, zahlt. Hieraus folgt die Gleichung: $A = \mathbf{a}P$ oder

$$P = \frac{A}{\mathbf{a}}. \tag{75}$$

Ist der Versicherte bei Abschluß des Vertrages x Jahre alt und lautet der Vertrag, daß der Versicherte (a) bis zu seinem Lebensende die Jahresprämie P zu zahlen hat, so ist offenbar nach (XIII)

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_x = a_x + 1. \tag{76}$$

Lautet der Vertrag, daß der Versicherte (b) bis zu seinem Tode, jedoch im Maximum t mal, die Prämie P zu zahlen hat, so ist $\mathbf{a}$ die Nettoprämie für eine $t$jährige, kurze Pränumerandoleibrentenv. auf die Summe 1 (vgl. XV). Daher ist im Falle (b) $\mathbf{a} = |_t\mathbf{a}_x$ (77)

oder nach Gleichung (28): $\mathbf{a} = 1 + |_{t-1}a_x$ (78)

oder nach Gleichung (27): $\mathbf{a} = \frac{N_{x-1} - N_{x+t-1}}{D_x}$. (79)

Im Falle (a) spricht man von lebenslänglicher, im Falle (b) von abgekürzter Prämienzahlung.

Wir wenden die Gleichungen (75)—(79) auf die verschiedenen V'en des Kap. III an. Eine lebenslängliche sowie temporäre Leibrente, die zum ersten Male ein

Jahr nach Abschluß des Vertrages ausgezahlt werden, erkauft man nur durch einmalige Einzahlungen; denn sonst würden ja in den folgenden Jahren gleichzeitig sowohl vom Versicherten als vom Versichernden Zahlungen stattzufinden haben, was sinnlos wäre.

§ 2. Aufgeschobene Leibrenten.

Wir wollen die jährlich gleichbleibende Nettoprämie bestimmen, die eine $x$jährige Person für eine um m Jahre aufgeschobene, postnumerando fällige Leibrente in der Höhe 1 zu zahlen hat, wenn die Prämienzahlung t Jahre hindurch, mit Abschluß des Vertrages beginnend, natürlich beim Tod des Versicherten aufhörend, stattzufinden hat. Die jährliche Prämie für die geschilderte V. wird mit ${}_tP({}_m|a_x)$ (XXIX) bezeichnet und ergibt sich aus (75), (XXIX)
da infolge von (XVI) $A = {}_m|a_x$ und infolge von (77)

$\mathbf{a} = |_t\mathbf{a}_x$ werden:
$$ {}_tP({}_m|a_x) = \frac{{}_m|a_x}{|_t\mathbf{a}_x} . \tag{80}$$

Durch die Formeln (31) und (79) geht (80) über in:

$$ {}_tP({}_m|a_x) = \frac{N_{x+m}}{N_{x-1} - N_{x+t-1}} . \tag{81}$$

Bezüglich der Bezeichnung (XXIX) ist folgende allgemeine Bemerkung zu machen: Das Symbol P für die Jahresprämie wird mit dem Symbol, das die einmalige Prämie der V. darstellt, verbunden; der Index t, welcher die Art der Prämienzahlung andeutet, ist dem P vorzusetzen.

Bei der geschilderten V. wird die jährliche Prämie gewöhnlich $m+1$ mal, d. h. bis ein Jahr vor dem Rentenbeginn, also während der gesamten Aufschubszeit, bezahlt. Es ist dann $t = m + 1$.

Beispiel: Ein Privatbeamter, der an seinem nächsten Geburtstage das 30. Lebensjahr vollendet, wünscht eine in 35 Jahren beginnende, alljährlich zahlbare Pension in Höhe von 1000 Mk. zu haben. Versichert sich derselbe an seinem 30. Geburtstage, so hat er für diese an seinem 65. Geburtstage anfangende Pension alljährlich 35 mal: Mk. $\frac{1000\, N_{64}}{N_{29} - N_{64}}$ zu zahlen. $x + m + 1 = 65$, $x = 30$; nach der Männersterbetafel der preußischen Rentenv'sanstalt ist bei einem Zinsfuß von $3^1/_2\,\%$ $N_{29} = 507532{,}4$, $N_{64} = 39075{,}56$; die jährliche Nettoprämie beträgt mithin Mk.: 83,42.

Die jährlich gleichbleibende Prämie für eine um m Jahre aufgeschobene, temporäre, postnumerando zahlbare Leibrente, die während n Jahren in Höhe der Einheit zur Auszahlung gelangen soll, wird, falls die Prämienzahlung von dem Versicherten t mal, bei Abschluß des Vertrages beginnend, jedenfalls mit dem Tode aufhörend, zu geschehen hat, bezeichnet mit ${}_tP\,({}_{m|n}a_x)$; denn nach (XVIII) ist die einmalige Nettoprämie für die geschilderte V. ${}_{m|n}a_x$. Die Anwendung der Gleichungen (75) und (77) ergibt, da $A = {}_{m|n}a_x$ zu setzen ist,

$$ {}_tP\,({}_{m|n}a_x) = \frac{{}_{m|n}a_x}{{}_{|t}\mathrm{a}_x}\,. \tag{82} $$

Vermöge der Gleichungen (37) und (79) erhält man:

$$ {}_tP\,({}_{m|n}a_x) = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{N_{x-1} - N_{x+t-1}}\,. \tag{83} $$

Gewöhnlich erfolgt auch hier die Prämienzahlung bis ein Jahr vor dem Rentenbeginn, also $t = m + 1$. Man kann auch $t < m + 1$ vereinbaren; $t > m + 1$ auszubedingen, hätte keinen Sinn, weil dann gleichzeitig von beiden Seiten Zahlungen zu leisten wären.

§ 3. Kapitalversicherung auf den Lebensfall und Versicherung mit festem Auszahlungstermine.

Versichert sich eine $x$jährige Person auf die Summe 1, die nur bei Erleben des $x+n$ten Geburtstages zur Auszahlung gelangt, und soll die Prämienzahlung, mit Abschluß des Vertrages beginnend, t Jahre hindurch, natürlich beim Tode aufhörend, jährlich gleichbleibend erfolgen, so beträgt die jährliche Nettoprämie nach Formel (75):

$$\frac{{}_nE_x}{{}_{|t}\mathbf{a}_x}; \tag{84}$$

denn nach (XIX) ist $A = {}_nE_x$ und nach (77) $\mathbf{a} = {}_{|t}\mathbf{a}_x$. Setzt man für ${}_nE_x$ und ${}_{|t}\mathbf{a}_x$ die Werte aus (40) bzw. (79), so wird die jährliche Prämie der geschilderten V., die mit ${}_tP({}_nE_x)$ zu bezeichnen ist, gleich

$$\frac{D_{x+n}}{N_{x-1} - N_{x+t-1}}. \tag{85}$$

Gewöhnlich wählt man in der Praxis $t = n$, d. h. die Prämienzahlung findet bis 1 Jahr vor dem eventuellen Auszahlungstermin statt; doch darf auch $t < n$ ausbedungen werden. Verträge mit der Bedingung $t > n+1$ wird eine V'sanstalt nicht abschließen; denn bei derartigen Bedingungen wäre der Versicherte nach Empfang der versicherten Summe bei längerer Lebensdauer noch zu weiterer Prämienzahlung verpflichtet. Es fände hier eine nachträgliche Prämienzahlung für bereits dem Versicherten zugut gekommene Vorteile statt.

Man kann auch auf folgende Weise eine V. mit jährlicher Prämienzahlung eingehen: Die V'ssumme ist n Jahre nach Abschluß des Vertrages zahlbar, unabhängig davon, ob der im Alter von x Jahren die V. Abschließende seinen $x+n$ten Geburtstag erlebt oder nicht erlebt; hingegen findet die jährlich gleichbleibende

Prämienzahlung, mit Abschluß des Vertrages beginnend, t mal, bei früherem Ableben des die V. Abschließenden (sog. Versorgers) aufhörend, statt. Ist die vertragsmäßig zur Auszahlung gelangende versicherte Summe die Einheit, so hat dieselbe bei Abschluß des Vertrages, da sie von der V'sanstalt an dem festen Auszahlungstermin, nämlich nach n Jahren, sicher zu zahlen ist, nach Formel (4) den Wert v^n. In Formel (75) sind $A = v^n$ und $\mathbf{a} = {}_{|t}\mathbf{a}_x$ zu setzen; daher wird die jährliche Prämie

$$\frac{v^n}{{}_{|t}\mathbf{a}_x} \tag{86}$$

oder unter Berücksichtigung von (79):

$$\frac{v^n D_x}{N_{x-1} - N_{x+t-1}}. \tag{87}$$

Gewöhnlich wird im Vertrage $t = n$ festgesetzt. Diese V. mit festem Auszahlungstermin, auch V. auf bestimmte Zeit genannt, wird besonders zu Aussteuerzwecken abgeschlossen, da ja bei vorzeitigem Ableben des Versorgers keine Prämien zu entrichten sind.

§ 4. Versicherung auf den Todesfall mit lebenslänglicher und abgekürzter Prämienzahlung. Natürliche Prämienzahlung.

Geht eine x jährige Person eine einfache V. auf den Todesfall ein, daß ihre Erben bei ihrem Tode die Einheit des Kapitals erhalten sollen, und wird die Prämienzahlung alljährlich lebenslänglich in gleicher Höhe geleistet, so bezeichnet man die jährliche Nettoprämie
(XXX) mit P_x oder $P(A_x)$ (XXX). Nach Formel (75) wird

$$P_x = P(A_x) = \frac{A_x}{1 + a_x}, \tag{88}$$

wie sich aus (XX) und (76) ergibt.

Setzt man für A_x seinen Wert aus (42), so erhält man den für Berechnung des P_x besonders bequemen Ausdruck:

$$P_x = v - 1 + \frac{1}{a_x + 1}$$

oder nach Formel (19)

$$P_x = v - 1 + \frac{1}{\mathfrak{a}_x}. \tag{89}$$

Mit Hilfe von (44), (19) und (20) folgt aus (88):

$$P_x = \frac{M_x}{N_{x-1}}. \tag{90}$$

Nach der Sterblichkeitstafel 23 D. G. M u. W I wird bei $3^1/_2$ %: $P_{30} = 0{,}019287$, $P_{40} = 0{,}026959$, $P_{50} = 0{,}040157$, $P_{60} = 0{,}063788$. Ein 30jähriger zahlt also bei den angegebenen Grundlagen für eine Todesfallv. lebenslänglich eine jährliche Nettoprämie von 192,87 Mk., falls das versicherte Kapital 10000 Mk. beträgt. Da nach 23 D. G. M u. W I alle Personen im Alter von 89—90 Jahren sterben, so zahlt die V'sanstalt, falls der Versicherte nicht früher stirbt, bei Vollendung des 90. Lebensjahres die versicherte Summe und empfängt die letzte Prämienzahlung bei Vollendung des 89. Lebensjahres.

Wir berechnen auch die jährlich gleichbleibende Nettoprämie einer $x$jährigen Person für das beim Tode zahlbare Kapital 1, wenn die Prämien bis zum Tod, höchstens jedoch t mal, bis zur Vollendung des $x+t-1$ten Lebensjahres zu entrichten sind. Aus Formel (75) ergibt sich die jährliche Nettoprämie gleich

$$\frac{A_x}{1 + {}_{|t-1}a_x} \tag{91}$$

oder unter Berücksichtigung von (44) und (79) gleich

$$\frac{M_x}{N_{x-1} - N_{x+t-1}}. \tag{92}$$

Um seinen Erben bei seinem Tode eine bestimmte Summe zu hinterlassen, könnte man auch, anstatt eine

einfache V. auf den Todesfall mit einmaliger oder jährlich gleichbleibender, lebenslänglicher oder abgekürzter Prämienzahlung einzugehen, auf folgende Art verfahren: Man versichert sein Leben nur auf die fragliche Summe für den Fall, daß der Tod im nächsten Lebensjahre eintritt, man geht also eine einjährige temporäre V. auf den Todesfall mit einmaliger Prämienzahlung ein; erlebt man das Ende dieser einjährigen V., so schließt man die nämliche V. wieder auf ein Jahr ab und wiederholt dieses Verfahren von Jahr zu Jahr. Anstatt jedes Jahr einen neuen Vertrag abzuschließen, kann man sofort bei Eingehen des ersten Vertrages den Fortbestand der V. unter den obigen Bedingungen vereinbaren. Wie sich aus der Formel (49) ergibt, hat der Versicherte, wenn er bei Abschluß des Vertrages $x$jährig ist und die versicherte Sterbesumme 1 beträgt, für das erste V'sjahr $|_1A_x = \frac{d_x}{l_x} v = q_x v$, für das zweite V'sjahr, in das er $x+1$jährig tritt, $|_1A_{x+1} = \frac{d_{x+1}}{l_{x+1}} v = q_{x+1} v$ usw. als Nettoprämie zu zahlen. Die geschilderte veränderliche Prämienzahlung wird als natürliche Prämienzahlung bezeichnet. Allgemein versteht man unter der natürlichen Prämie diejenige Prämie, durch die man sich die Vorteile der V. nur für die Dauer des dem Abschluß des Vertrages unmittelbar folgenden Jahres verschafft.

Die V. gegen natürliche Prämienzahlung ist wohl nur in Amerika üblich (Assessmentsystem)[1]). Für die Todesfallv. ist die natürliche Prämienzahlung die unnatürlichste; denn die von dem Versicherten alljährlich aufzubringenden Netto-

[1]) Vgl. den Artikel „Assessment" von Dornis im Handwörterbuch des gesamten V'swesens (1897), von dem nur der erste Band erschienen ist. Siehe auch H. v. Knebel-Doeberitz, Streifzüge durch das amerikanische V'swesen, Zeitschr. f. d. ges. V'swissenschaft, Bd. 1, S. 332.

prämien $|_1A_x$, $|_1A_{x+1}$, $|_1A_{x+2}$, ... sind proportional den Sterbenswahrscheinlichkeiten q_x, q_{x+1}, q_{x+2}, ..., wachsen also, abgesehen vom jugendlichen Alter, ebenso wie diese von Jahr zu Jahr und nehmen für höhere Lebensalter sehr beträchtliche Werte an, so daß der Versicherte, welcher, durch die niedrigen Prämien der jugendlichen Alter verlockt, diese V. abschließt, in höherem Lebensalter, wo auch die Erwerbstätigkeit schwerer ist, sich zumeist außerstande sieht, die hohen Prämien aufzubringen, und, trotzdem die Sterbensgefahr für ihn größer geworden ist, die V. stornieren (aufgeben) muß, ohne daß die bereits bezahlten Prämien den beabsichtigten Zweck der Versorgung der Hinterbliebenen erfüllten. Versichert sich z. B. ein Dreißigjähriger gegen natürliche Prämienzahlung auf die Sterbesumme von 10 000 Mk., so hätte er bei Zugrundelegung von 23 D. G. M u. W I und $3^1/_2$ % Zinsfuß für das erste V'sjahr Mk.: 85,31, für das elfte V'sjahr, in das er 40jährig tritt, Mk.: 113,71 und für das 41. V'sjahr Mk.: 703,00 als Nettoprämie zu zahlen. Ganz konsequent durchgeführt wird dieses System auch nicht in Amerika.

§ 5. Temporäre und gemischte Todesfallversicherung.

Eine $x$jährige Person versichere sich auf die Summe 1, die nur dann zur Auszahlung gelangt, wenn der Tod der versicherten Person bis zur Vollendung ihres $x+n$ten Lebensjahres eintritt. Die Prämienzahlung finde alljährlich gleichbleibend bis zur Vollendung des $x+t-1$ten Lebensjahres, natürlich mit früherem Tode aufhörend, statt. Die jährliche, gleichbleibende Prämie beträgt nach (75):

$$\frac{|_nA_x}{1+|_{t-1}a_x}; \tag{93}$$

denn A ist für den jetzigen Fall nach (XXIII) gleich $|_nA_x$. Verwendet man (51) und (79), so findet man die jährliche Prämie:

$$_tP(|_nA_x) = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_{x-1} - N_{x+t-1}}. \tag{94}$$

Die Formel (94) kommt z. B. bei der sogenannten Risiko- oder Umtauschv. der Aktiengesellschaft Atlas in Ludwigshafen zur Anwendung. Dieser V'smodus gestattet Personen, die zurzeit noch über die V'sform unschlüssig sind, zunächst eine fünfjährige temporäre V. auf den Todesfall mit 5 Prämienzahlungen in gleicher Höhe einzugehen. Diese V. kann dann in eine neue umgetauscht werden, die auf den Anfang der Risikov. zurückdatiert wird; der Prämienberechnung der neuen V. wird das ursprüngliche Beitrittsalter zugrunde gelegt, und die schon gezahlten Prämien sind durch Nachzahlungen zu ergänzen. Die Risikov. ist also als Einleitung für eine einfache oder gemischte Todesfallv. mit jährlicher, gleichbleibender Prämienzahlung gedacht. Die V. kann auch auf zehnjährigen Zeitraum abgeschlossen werden, und zwar so, daß sie nach Ablauf dieses Zeitraumes, wenn sie nicht inzwischen in eine gewöhnliche Todesfallv. umgewandelt wurde, ohne neue ärztliche Untersuchung entweder mit fallender V'ssumme oder mit steigender Prämie in gleicher Weise fortgesetzt werden kann. Es handelt sich also um lebenslänglich fortsetzbare temporäre Todesfallv'en von je zehnjähriger V'sdauer.

Betrachten wir die jährlich gleichbleibende Prämienzahlung bei der gemischten Todesfallv. Die jährlich gleichbleibende Nettoprämie für die Einheit des versicherten Kapitals, das entweder bei dem Tode oder spätestens bei Vollendung des $x+n$ten Lebensjahres des Versicherten zur Auszahlung gelangt, beträgt, wenn die Prämienzahlung bei Abschluß des Vertrages, zu welcher Zeit der Versicherte x Jahre alt ist, beginnt und, falls nicht früherer Tod eintritt, bis zur Vollendung des $x+t-1$ten Lebensjahres währt, nach Formel (75):

$$\frac{A_{x\overline{n}|}}{1+{}_{|t-1}a_x}; \tag{95}$$

denn für den betrachteten Fall ist nach (XXIV) $A = A_{x\overline{n}|}$. Vermöge (55) und (79) geht (95) über in

$$\frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_{x-1} - N_{x+t-1}} . \tag{96}$$

Die angegebene Prämie ist nach der S. 87 gemachten allgemeinen Bemerkung durch ${}_tP(A_{x\overline{n}|})$ zu bezeichnen.

Für die Praxis ist besonders der Fall $t = n$, also Prämienzahlung bis zur Vollendung des $x + n - 1$ten Lebensjahres, von Bedeutung. Für $t = n$ wird (95) übergehen in

$$\frac{A_{x\overline{n}|}}{1 + |_{n-1}a_x} = \frac{A_{x\overline{n}|}}{|_n\mathbf{a}_x} \quad \text{[vgl. (28)]}; \tag{97}$$

setzt man in (97) für $A_{x\overline{n}|}$ seinen Wert aus (58), so erhält man

$$\frac{A_{x\overline{n}|}}{1 + |_{n-1}a_x} = v - 1 + \frac{1}{1 + |_{n-1}a_x}$$

oder

$$v - 1 + \frac{1}{|_n\mathbf{a}_x} . \tag{98}$$

Formel (98) ist analog wie (89) gebaut.

Man bezeichnet die jährliche Prämie

$$\frac{A_{x\overline{n}|}}{1 + |_{n-1}a_x} \text{ auch kurz mit } P_{x\overline{n}|} \text{ (XXXI)}.$$ (XXXI)

Die Formeln der gemischten Todesfallv. kommen bei den Lebensv'sanstalten am häufigsten zur Anwendung; denn die gemischte V. mit jährlicher Prämienzahlung hat heute unter den verschiedenen V'sformen des Lebensv'sgeschäftes den stärksten Umfang[1]).

Die Herleitung der Formeln für die jährliche, gleichbleibende Nettoprämie einer Todesfallv. mit Karenzzeit kann dem Leser überlassen bleiben.

[1]) Im Jahre 1907 stieg bei den deutschen Gesellschaften der Bestand an gemischten Todesfallv'en um 571 Millionen Mk., d. h. um 87,9% des gesamten Zuwachses an Kapitalv'en auf den Todes- und Erlebensfall. (Siehe Irányi, Assekuranzjahrbuch, Jahrg. 30, S. 164 (1909).)

V. Kapitel.

Die Praxis.

§ 1. Ausreichende Prämien und Bruttoprämien.

Wir haben bisher nur die sogenannten Netto-, rein mathematischen oder rechnungsmäßigen Prämien behandelt. Ihre Herleitung schließt drei Voraussetzungen in sich: erstens den Eintritt einer großen Zahl V'snehmer des gleichen Lebensalters, die in das gleiche V'sverhältnis eintreten und sich auf die nämliche Summe versichern, zweitens das Absterben dieser Gesellschaft nach der Sterbetafel, drittens die Anlegung aller bei der V'sgesellschaft eingehenden Nettoprämien zu dem für die Rechnungen angenommenen Zinsfuß. Wären diese Voraussetzungen erfüllt, so würden die von den Versicherten gezahlten Nettoprämien alle Auszahlungen der V'sanstalt für V'sfälle decken.

Noch nicht berücksichtigt sind bei dieser Prämienbestimmung die Unkosten, mit denen jede V'sgesellschaft arbeitet. Diese lassen sich einteilen in: einmalige oder erste Unkosten, auch Abschluß- oder Erwerbskosten genannt, zur Herbeischaffung neuer V'en und dauernde oder jährliche Unkosten zur Abwicklung der alten V'en. Die ersten, nur einmal auftretenden Unkosten sind diejenigen Ausgabeposten der V'sanstalt, die bei Verzicht auf jedes Neugeschäft fortfallen würden; es sind: in erster Reihe die dem Agenten für die Zuführung des Versicherten von der Anstalt gezahlte Abschlußprovision (bei mittleren Gesellschaften etwa 12—20 ‰ der V'ssumme), ferner die Gehälter der Außenbeamten und derjenigen Innenbeamten, die mit dem Neuabschluß beschäftigt sind, Portoaufwand, Pro-

spekte und Inserate zum Zweck der Neuwerbung, Honorar für ärztliche Untersuchung, Stempelausgaben usw. Dauernde, also alljährlich wiederkehrende Unkosten sind die jährlichen Verwaltungs- und Organisationskosten (Gehälter und Tantiemen für die Beamten, Miete für das Lokal, Korrespondenz usw.), Steuern, Abschreibungen, welche die V'sanstalt alljährlich auf ihr Inventar zu machen hat, die Inkassoprovisionen, welche die Agenten alljährlich für das Einkassieren der Prämien erhalten u. dgl. m.

Eine Kalkulierung der einmaligen und dauernden Unkosten ist für jeden V'sbetrieb notwendig. „Diese Unkosten, namentlich die ersten Unkosten, sind", wie das Eidgenössische V'samt[1]) meint, „ein so sicheres Element, daß dieses in vielen Fällen sogar genauer im voraus festgesetzt werden kann als der künftige Zinsfuß und die künftige Sterblichkeit". Die ersten und die jährlichen Unkosten sind zur Bestimmung der von Dr. Höckner[2]) sogenannten „ausreichenden Prämien" erforderlich und gehören nach ihm zu den „Rechnungsgrößen zweiter Ordnung", die im Gegensatz zu den „Rechnungsgrößen erster Ordnung" stehen. Unter letzteren versteht man den zur Bestimmung der Nettoprämie erforderlichen rechnungsmäßigen Zinsfuß und die Sterbetafel. Die ausreichende Prämie ist diejenige Prämie, die sowohl die Nettoverpflichtungen des

[1]) Bericht des Eidgenöss. V'samtes über das Jahr 1907, S. XIX.

[2]) Logophilus (Höckner), Der Streit über die Zillmersche Methode in der Lebensv.. Berlin 1902. — G. Höckner, Bedeutung des Deckungskapitals im Lebensv'sbetrieb, Zeitschr. f. d. ges. V'swissenschaft, Bd. 5 (1905), S. 511. — G. Höckner, Änderung der Rechnungsgrundlagen usw. für die Lebensv'sgesellschaft zu Leipzig. Leipzig 1907. — G. Höckner, Das Deckungskapital im Lebensv'svertrag und die Abfindungswerte bei vorzeitiger Vertragslösung. Heft 16 der Veröffentlichungen des Deutschen Vereins f. V'swissenschaft (1909).

V'svertrages als auch die durch ihn entstehenden unvermeidlichen einmaligen und dauernden Unkosten deckt.

Um die jährliche ausreichende Prämie P_x'
(XXXII) (XXXII) für die V'ssumme 1 aus der jährlichen gleichbleibenden, während der ganzen V'szeit zahlbaren Nettoprämie P_x herzuleiten, nimmt man an, daß die jährlichen Unkosten einen Teil $\gamma P_x'$ der ausreichenden Jahresprämie P_x' ausmachen, wobei γ ein echter Bruch ist; die einmaligen Unkosten mögen für die Einheit der versicherten Summe δ betragen. Versteht man unter $\mathbf{a}$ den Barwert oder die einmalige Prämie für eine Leibrente, welche an eine $x$jährige Person, mit Abschluß der V. beginnend, alljährlich in der gleichen Höhe 1 ebenso zur Auszahlung gelangen soll, wie die jährliche Prämienzahlung bei der abgeschlossenen V'sart stattfindet (die Bezeichnung $\mathbf{a}$ ist wie S. 85), so haben alle ausreichenden Prämien P_x', welche die V'sanstalt empfängt, bei Abschluß des Vertrages den Barwert $\mathbf{a} P_x'$. Diese Summe muß aber decken: den Barwert aller Nettoprämien P_x bei Abschluß des Vertrages, der $\mathbf{a} P_x$ beträgt, ferner den Barwert aller dauernden Unkosten, die alljährlich $\gamma P_x'$ betragen und daher, für den Zeitpunkt des Abschlusses des Vertrages gerechnet, den Barwert $\mathbf{a} \gamma P_x'$ haben, sowie die einmaligen Unkosten in Höhe von δ. Hieraus ergibt sich die Gleichung:

$$\mathbf{a} P_x' = \mathbf{a} P_x + \mathbf{a} \gamma P_x' + \delta \tag{99}$$

oder

$$\mathbf{a} P_x' (1 - \gamma) = \mathbf{a} P_x + \delta ;$$

mithin wird:

$$P_x' = \frac{P_x}{1 - \gamma} + \frac{\delta}{\mathbf{a}(1 - \gamma)} . \tag{100}$$

Führt man

$$k = \frac{1}{1 - \gamma} - 1 = \frac{\gamma}{1 - \gamma} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{\delta}{\mathbf{a}(1 - \gamma)}$$

ein, so kann man die Formel (100) auch schreiben:

$$P'_x = P_x (1 + k) + \lambda, \qquad (101)$$

wobei λ infolge des $\mathbf{a}$ eine vom Alter des Versicherten abhängige Größe ist.

Die Werte γ und δ wären für jede Anstalt individuell aus ihren Büchern zu bestimmen und bei Neugründungen anderen Betrieben zu entlehnen. Abschlußkosten von $30^0/_{00}$ der V'ssumme und laufende Verwaltungskosten von $7^1/_2{}^0/_0$ der ausreichenden Prämie dürften für die Todesfallv. bei deutschen Gesellschaften geeignete Schätzungswerte sein, die von mittleren Gesellschaften nicht überschritten werden. Aus $\gamma = 0{,}075$ und $\delta = 0{,}03$ folgt $P'_x = 1{,}081\, P_x + \frac{0{,}03}{\mathbf{a}}$. Für eine gemischte Todesfallv. von 10 000 Mk., die ein 30jähriger auf das Alter 60 gegen jährlich gleichbleibende Prämie abschließt, ist bei Zugrundelegung der Tafel 23 D. G. M u. W I und eines Zinses von $3^1/_2{}^0/_0$ die Jahresprämie $10000\, P_{30\,\overline{30}|} = 264$ Mk. Da für $\mathbf{a}$ die Größe $_{|30}\mathbf{a}_{30} = 16{,}6034$ zu nehmen ist, ergibt sich als ausreichende Prämie $1{,}081 \cdot 264 + \frac{300}{16{,}6034} = 285{,}38 + 18{,}07 = 303{,}45$ Mk. (vgl. die zitierte Schrift von Logophilus S. 27).

Um aus der einmaligen Nettoprämie A_x für eine V. auf die Summe 1 die einmalige ausreichende Prämie A'_x (XXXIII) zu bestimmen, nehmen wir an, (XXXIII)

[1]) Die Vorschrift für die internationale Bezeichnung ist folgende: In besonderen Untersuchungen, wo modifizierte Werte vorkommen, empfiehlt es sich, Akzente anzuwenden. Soll z. B. bei Berechnung der Prämienreserve anstatt der reinen Prämie eine besondere (aus einer anderen Tafel genommene oder mit einem gewissen Aufschlag versehene) angewandt werden, so bezeichne man sie mit P' und die zugehörige Prämienreserve mit V'. Ebenso kann die Tarifprämie mit P'' bezeichnet werden. (Transactions of the second international actuarial congress (1898), p. 638.)

die dauernden Unkosten betragen jährlich u auf die Einheit der versicherten Summe oder Rente. Ist $\mathbf{a}$ der Barwert einer Pränumerandoleibrente, die jährlich in der Höhe 1 so lange zur Auszahlung gelangt, als die V. vertragsmäßig zu laufen hat, also Kosten verursacht, so bewerten sich die jährlichen Unkosten zur Zeit des Abschlusses des Vertrages auf $u\mathbf{a}$. Während bei wiederholter Prämienzahlung die ersten Unkosten nach der versicherten Summe geschätzt wurden, empfiehlt es sich, bei einmaliger Prämienzahlung die ersten Unkosten nach der Prämie zu bemessen; denn die ersten Unkosten sind hauptsächlich Agentenprovision, und der Agent wird bei einmaliger Prämienzahlung zumeist mit 2—3 % der Einzahlung des Versicherten entlohnt. Die einmaligen Unkosten seien also proportional der vereinnahmten ausreichenden Prämie und mögen betragen $\varepsilon A'_x$, wobei ε ein echter Bruch ist. Die ausreichende Prämie A'_x ist die Summe aus Nettoprämie, einmaligen Unkosten und dem Wert der dauernden Unkosten; hieraus folgt:

$$A'_x = A_x + \varepsilon A'_x + u\,\mathbf{a} \tag{102}$$

oder

$$A'_x(1-\varepsilon) = A_x + u\,\mathbf{a};$$

mithin wird

$$A'_x = \frac{A_x}{1-\varepsilon} + \frac{u\,\mathbf{a}}{1-\varepsilon}. \tag{103}$$

Definiert man

$$k = \frac{1}{1-\varepsilon} - 1 = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{u\,\mathbf{a}}{1-\varepsilon},$$

so kann man die Formel (103) auch schreiben:

$$A'_x = A_x(1+k) + \lambda. \tag{104}$$

$\varepsilon = 0{,}04$ (einmalige Unkosten 4 % der ausreichenden Prämie) und $u = 0{,}002$ (jährliche Unkosten 2 ‰ der

versicherten Summe) wären Schätzungswerte, mit denen ein sparsamer Betrieb auskommen könnte.

Ein jeder rationeller V'sbetrieb muß von jedem V'skandidaten mindestens eine ausreichende Prämie nehmen. Es ist aber üblich, ihn eine mehr als ausreichende Prämie zahlen zu lassen; diese ermöglicht, eine Gewinnbildung zustande zu bringen, die Anlage von Sicherheitsfonds für etwaige durch Mißjahre entstehende Extraausgaben zu bewerkstelligen und die schädlichen Folgen ungenauer Rechnungsgrundlagen abzuschwächen. Der praktische Betrieb sieht häufig von einer Bestimmung der ausreichenden Prämie ab und betrachtet bloß die von dem Versicherten wirklich erhobene Prämie. Nur die letztere wird in den von den V'sgesellschaften veröffentlichten Prospekten und Tarifen aufgeführt; sie heißt die Brutto-, Tarif- oder Anstaltsprämie (office premium). Bei den deutschen Anstalten leitet man die Bruttoprämien zumeist — besondere Methoden der Bestimmung der Bruttoprämien, die auch auf die Dividendenbildung Rücksicht nehmen, haben die Gothaer und die Leipziger Lebensv'sgesellschaft — aus den Nettoprämien durch analog gebaute Formeln, wie es (101) und (104) sind, her. Man nimmt die Bruttoprämie A''_x (XXXIV) bei einmaliger Prämienzahlung in der Form (XXXIV)

$$A''_x = A_x(1 + k_1) + \lambda_1 \qquad (104')$$

und die Bruttoprämie P''_x (XXXV) bei jährlich wiederkehrender Prämienzahlung in der Form (XXXV)

$$P''_x = P_x(1 + k_1) + \lambda_1 \qquad (101')$$

an; hierbei werden k_1 und λ_1 bei verschiedenen Anstalten, bei verschiedenen V'sarten und auch für verschiedenes Lebensalter, in dem die Versicherten bei Ab-

schluß des Vertrages stehen, verschieden gewählt. Die Dividendenpolitik läßt die Anstalten A''_x und P''_x erheblich höher wählen, als dies für die ausreichenden Prämien A'_x und P'_x erforderlich wäre. Man sagt, die Bruttoprämie ist durch Zuschlag aus der Nettoprämie abgeleitet. Das deutsche Reichsgesetz (vgl. S. 13) verlangt, daß der Aufsichtsbehörde mitgeteilt wird, wie die Bruttoprämien aus den Nettoprämien gewonnen wurden.

Es mögen noch einige Prämienbestimmungen folgen: Bei einmaliger Prämienzahlung wird zumeist die Formel $A''_x = A_x(1 + k_1)$ verwendet. Eine bekannte V'sanstalt berechnet die einmalige Tarifprämie für Leibrenten nach der Formel $A''_x = A_x \cdot 1{,}05$. Die preußische Renten-v'sanstalt wählt

$$A''_x = \frac{100}{95} A_x .$$

Einer V'sanstalt verdanke ich die freundliche Mitteilung, daß sie für ihre Todesfallv. mit lebenslänglicher Prämienzahlung die Bruttoprämie aus der Nettoprämie nach der Formel:

$$P''_x = P_x\left(1 + \frac{1}{20}\right) + \frac{1}{500}$$

berechnet; für die gemischte Todesfallv. bestimmt sie die jährliche Bruttoprämie $P''_{x\overline{n}|}$ durch

$$P''_{x\overline{n}|} = P_{x\overline{n}|}\left(1 + \frac{1}{20}\right) + \frac{1}{500} + \frac{1}{10} P_x . \qquad (105)$$

$P_{x\overline{n}|}$ ist durch (XXXI) definiert, P_x bedeutet die jährliche Nettoprämie für die Todesfallv. und ist durch (XXX) definiert. Formel (105) geht aus (101′) hervor, wenn man

$$k_1 = \frac{1}{20}, \quad \lambda_1 = \frac{1}{500} + \frac{1}{10} P_x \quad \text{setzt.}$$

Besonders häufig wird die Bruttoprämie nach der Formel:

$$P''_x = P_x(1 + k_1), \quad \text{also} \quad \lambda_1 = 0$$

bestimmt.

Eine große deutsche, nach 23 D. G. M u. W I mit $3^1/_2$% rechnende V'sgesellschaft nimmt beim Eintrittsalter 30 für die Todesfallv. auf 1000 Mk. V'ssumme mit lebenslänglicher Prämienzahlung, wofür die jährliche Nettoprämie 19,287 Mk. beträgt, 27,3 % der Nettoprämie als Aufschlag, d. h. $k_1 = 1{,}273$; die jährliche Bruttoprämie beträgt unter Abrundung der Pfennige 24,60 Mk. Vom 34. Lebensjahre an nimmt dieselbe Anstalt für die gleiche V'sart, unabhängig vom Alter des Versicherten, den Zuschlag von 24 % der Nettoprämie, also $P''_x = 1{,}24\, P_x$. Eine andere Anstalt wählt für die jährliche Prämienzahlung ihrer Todesfallv'en beim Alter 20 $P''_{20} = 1{,}25\, P_{20}$ und läßt die Konstante $k_1 = 0{,}25$ alljährlich bis zum Alter 45 um 0,002 abnehmen, so daß $P''_{45} = 1{,}20\, P_{45}$ wird. Für die höheren Alter wird $k_1 = 1{,}20$ beibehalten.

§ 2. Prämienrückgewähr.

Häufig schließt jemand eine derartige V. ab, daß die V'sanstalt sich verpflichtet, ihm oder seinen Erben unter gewissen vertragsmäßig festgesetzten Bedingungen die eingezahlten Prämien oder einen Teil derselben zurückzuzahlen; man spricht dann von einer V. mit Prämienrückgewähr. Meistens werden die Bruttoprämien oder Teile derselben zurückgezahlt.

Wir behandeln folgendes der Praxis entlehntes Beispiel: Eine $x$jährige Person versichert sich auf die Summe 1, die bei ihrem Ableben zahlbar wird. Beim

Erleben des Ablaufes der Prämienzahlungsperiode, die längstens n Jahre währt, oder beim früheren Ableben wird außerdem die Hälfte der gezahlten Prämien zurückgewährt.

Die jährliche Nettoprämie für diese V. sei Π_x, die jährliche Bruttoprämie sei Π'_x. Es möge

$$\Pi'_x = \Pi_x (1 + k) + \lambda \tag{106}$$

sein, wobei k und λ bekannte Größen bedeuten. Der Barwert der Leistungen der V'sanstalt zur Zeit des Abschlusses des Vertrages setzt sich aus zwei Summanden zusammen. Der eine Summand ist wegen der beim Tode fällig werdenden Summe 1 nach (44): $\frac{M_x}{D_x}$. Da an die Erben einer jeden im ersten V'sjahre sterbenden Person außerdem noch die Summe $\frac{\Pi'_x}{2}$, an die Erben einer jeden im zweiten V'sjahre sterbenden Person noch die Summe $2\frac{\Pi'_x}{2}$ usw., an die Erben einer jeden im $n$ten V'sjahre sterbenden Person noch die Summe $n\frac{\Pi'_x}{2}$, schließlich an jede derartig versicherte Person, welche ihren $x + n$ten Geburtstag erlebt, außer der bei ihrem Tode fälligen Summe 1 noch bei Erleben des $x + n$ten Geburtstages die Summe $\frac{n\,\Pi'_x}{2}$ zur Auszahlung gelangt, so haben diese Leistungen nach (74) bei Abschluß des Vertrages den Barwert:

$$\frac{\Pi'_x}{2}\left(\frac{C_x + 2\,C_{x+1} + 3\,C_{x+2} + \ldots + n\,C_{x+n-1} + n\,D_{x+n}}{D_x}\right).$$

Nach dem Prinzip der Gleichheit von Leistung und

Gegenleistung beträgt mithin die einmalige Nettoprämie des Versicherten:

$$\frac{M_x}{D_x}+\frac{\Pi'_x}{2}\left(\frac{C_x+2C_{x+1}+3C_{x+2}+\ldots+nC_{x+n-1}+nD_{x+n}}{D_x}\right). \quad (107)$$

Hierbei ist, wie auf S. 66, angenommen, daß die Auszahlungen immer am Schlusse des V'sjahres stattfinden.

Die jährliche, gleichbleibende Nettoprämie findet man bei n maliger Prämienzahlung, die bei früherem Tode des Versicherten aufhört, nach (75), (107) und (79):

$$\left[\frac{M_x}{D_x}+\frac{\Pi'_x}{2}\left(\frac{C_x+2C_{x+1}+3C_{x+2}+\ldots+nC_{x+n-1}+nD_{x+n}}{D_x}\right)\right]$$

$$:\left(\frac{N_{x-1}-N_{x+n-1}}{D_x}\right). \quad (108)$$

Es ist also

$$\Pi_x=\frac{M_x+\frac{\Pi'_x}{2}(C_x+2C_{x+1}+3C_{x+2}+\ldots+nC_{x+n-1}+nD_{x+n})}{N_{x-1}-N_{x+n-1}}. \quad (109)$$

Setzt man in (109) für Π'_x seinen Wert aus (106), so hat man für Π_x eine Gleichung:

$$\Pi_x\left[N_{x-1}-N_{x+n-1}-\left(\frac{1+k}{2}\right)(C_x+2C_{x+1}+3C_{x+2}+\ldots\right.$$

$$\left.+nC_{x+n-1}+nD_{x+n})\right]$$

$$=M_x+\frac{\lambda}{2}(C_x+2C_{x+1}+3C_{x+2}+\ldots+nC_{x+n-1}+nD_{x+n}).$$

Daher ist:

$$\Pi_x=\frac{M_x+\frac{\lambda}{2}\left\{\quad\right\}}{N_{x-1}-N_{x+n-1}-\left(\frac{1+k}{2}\right)\left\{\quad\right\}}. \quad (110)$$

Die geschweifte Klammer hat im Zähler wie im Nenner den gleichen Wert:

$$C_x + 2\,C_{x+1} + 3\,C_{x+2} + \ldots + n\,C_{x+n-1} + n\,D_{x+n}\,.$$

Π_x ist mithin gefunden, da auf der rechten Seite von (110) lauter bekannte Größen stehen.

Für Berechnungen von V'en mit Prämienrückgewähr handelt es sich immer um Herstellung einer Gleichung zwischen Brutto- und Nettoprämie wie (109). Führt man in diese Gleichung die Relation, welche die Bruttoprämie aus der Nettoprämie ergibt, ein, so hat man eine Gleichung zur Bestimmung der Nettoprämie.

V'en mit Prämienrückgewähr werden besonders in solchen Fällen abgeschlossen, in denen die V'sanstalt eventuell für die Hauptv. nichts auszuzahlen in die Lage kommen kann (Todesfallv. mit Karenzzeit, aufgeschobene Leibrentenv. usw.).

Wir behandeln noch ein Beispiel einer V. mit Prämienrückgewähr: Eine $x$jährige Person geht eine Erlebensv. auf die Summe 1 ein, die bei Erleben des $x+n$ten Geburtstages zur Auszahlung gelangt. Die jährliche, gleichbleibende Prämienzahlung beginne bei Abschluß des Vertrages und dauere, vorausgesetzt, daß der Versicherte nicht früher stirbt, n Jahre. Stirbt die versicherte Person vor Erreichung des $x+n$ten Lebensjahres, so sollen an die Erben die bereits eingezahlten Bruttoprämien nebst Zinseszinsen, die laut Vertrag pro Jahr auf $100\,i'$ % festgesetzt seien, zur Auszahlung gelangen.

Die jährliche, gleichbleibende Bruttoprämie der geschilderten V. möge mit Π'_x, die jährliche, gleichbleibende Nettoprämie mit Π_x bezeichnet werden. Π'_x und Π_x mögen durch die Formel (106) $\Pi'_x = \Pi_x\,(1+k) + \lambda$ zusammenhängen, wobei k und λ bekannte Größen sind.

Wir nehmen an, daß eine fingierte Gesellschaft von l_x Personen eine V. der geschilderten Art auf die Summe 1 abschließt. Infolge der Hauptv. hat die V'sanstalt an jede der l_{x+n} nach Verlauf von n Jahren noch lebenden Personen die Summe 1 zu zahlen; der Barwert dieser Leistung beträgt

bei Abschluß des Vertrages $l_{x+n} \cdot v^n$. (Siehe S. 23.) Hierzu kommen noch die Leistungen der V'sanstalt infolge der Prämienrückgewähr. Bedeutet $f \leqq n$ eine ganze positive Zahl, so sterben im Laufe des $f$ten V'sjahres von der fingierten Gesellschaft von l_x Personen d_{x+f-1} Personen, die f Jahre hindurch die Bruttoprämie Π'_x bezahlt haben. An die Erben jeder dieser d_{x+f-1} Personen hat die V'sanstalt die eingezahlten Bruttoprämien Π'_x mit Zinseszinsen bei $100\,i'$ % zurückzuerstatten. Die erste Bruttoprämie Π'_x, welche die V'sanstalt bei Abschluß des Vertrages erhalten hat, ist nach Formel (2) im Verlaufe der f Jahre[1]) zu $\Pi'_x(1+i')^f$ angewachsen. Die zweite Bruttoprämie, die sich $f-1$ Jahre im Besitze der V'sanstalt befindet, wächst zu $\Pi'_x(1+i')^{f-1}$ an. Auf diese Art geht es fort. Die letzte der f Prämienzahlungen ist von der V'sanstalt nur ein Jahr zu verzinsen, sie beträgt daher am Schluß des $f$ten V'sjahres $\Pi'_x(1+i')$. Am Schluß des $f$ten V'sjahres muß die V'sanstalt an die Erben jeder der d_{x+f-1} verstorbenen Personen die Summe:

$$\Pi'_x(1+i')+\Pi'_x(1+i')^2+\ldots+\Pi'_x(1+i')^{f-1}+\Pi'_x(1+i')^f,$$

an die Erben der d_{x+f-1} Personen zusammen das d_{x+f-1}fache dieses Betrages zahlen. Der Barwert dieser Summe ist bei Abschluß des Vertrages nach Formel (4):

$$v^f \cdot d_{x+f-1} \cdot \Pi'_x[(1+i')+(1+i')^2+\ldots+(1+i')^{f-1}+(1+i')^f].$$

Der zuletzt hingeschriebene Ausdruck geht durch Multiplikation mit $l_x \cdot \frac{v^x}{l_x \cdot v^x}$, das gleich 1 ist, wenn man (XI) und (XXI) beachtet, über in:

$$l_x \cdot \frac{C_{x+f-1}}{D_x} \cdot \Pi'_x \cdot [(1+i')+(1+i')^2+\ldots+(1+i')^f].$$

Setzt man $f=1, 2, 3, \ldots n$, so findet man durch Addition den Barwert aller Leistungen, die das V'sinstitut wegen der Prämienrückgewähr übernommen hat, zur Zeit des Abschlusses des Vertrages gleich

$$l_x \cdot \frac{C_x}{D_x}\Pi'_x(1+i')+l_x\frac{C_{x+1}}{D_x}\Pi'_x[(1+i')+(1+i')^2]+$$

[1]) Wir machen, wie auf S. 66, die Annahme, daß die Auszahlungen immer erst am Ende des V'sjahres, in dem der Tod eintritt, stattfinden.

$$+ l_x \cdot \frac{C_{x+2}}{D_x} \Pi'_x [(1 + i') + (1 + i')^2 + (1 + i')^3] +$$

. . . .

$$+ l_x \frac{C_{x+n-1}}{D_x} \Pi'_x [(1+i') + (1+i')^2 + (1+i')^3 + \ldots + (1+i')^n]$$

$$= l_x \Pi'_x (1 + i') \left(\frac{C_x}{D_x} + \frac{C_{x+1}}{D_x} + \frac{C_{x+2}}{D_x} + \ldots + \frac{C_{x+n-1}}{D_x}\right) +$$

$$+ l_x \Pi'_x (1 + i')^2 \left(\frac{C_{x+1}}{D_x} + \frac{C_{x+2}}{D_x} + \ldots + \frac{C_{x+n-1}}{D_x}\right) +$$

$$+ l_x \Pi'_x (1 + i')^3 \left(\frac{C_{x+2}}{D_x} + \frac{C_{x+3}}{D_x} + \ldots + \frac{C_{x+n-1}}{D_x}\right) +$$

. . . .

$$+ l_x \Pi'_x (1 + i')^{n-1} \left(\frac{C_{x+n-2}}{D_x} + \frac{C_{x+n-1}}{D_x}\right) +$$

$$+ l_x \Pi'_x (1 + i')^n \cdot \left(\frac{C_{x+n-1}}{D_x}\right).$$

Unter Benützung von (XXII) wird dieser Ausdruck gleich:

$$l_x \Pi'_x (1 + i') \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + l_x \Pi'_x (1 + i')^2 \cdot \frac{M_{x+1} - M_{x+n}}{D_x} +$$
$$+ l_x \Pi'_x (1 + i')^3 \frac{M_{x+2} - M_{x+n}}{D_x} + \ldots$$
$$+ l_x \Pi'_x (1 + i')^n \cdot \frac{M_{x+n-1} - M_{x+n}}{D_x}.$$

Der Barwert der gesamten Leistungen des V'sinstituts an die l_x Personen beträgt mithin:

$$l_{x+n} \cdot v^n + l_x \Pi'_x \left[(1+i') \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + (1+i')^2 \frac{M_{x+1} - M_{x+n}}{D_x} +\right.$$
$$\left. + (1+i')^3 \frac{M_{x+2} - M_{x+n}}{D_x} + \ldots + (1+i')^n \frac{M_{x+n-1} - M_{x+n}}{D_x}\right].$$

Demgegenüber zahlen die l_x Versicherten n Jahre, jedoch nur solange sie leben, die jährliche Nettoprämie Π_x. Diese Leistung hat bei Abschluß des Vertrages für den einzelnen Versicherten den Barwert $\Pi_x \cdot {}_{|n}\mathbf{a}_x$ (vgl. S. 86), für die l_x Personen $l_x \cdot \Pi_x \cdot {}_{|n}\mathbf{a}_x$. Die eben gefundene Summe wird nach Formel (79) gleich

$$l_x \cdot \Pi_x \cdot \frac{N_{x-1} - N_{x+n-1}}{D_x}.$$

Nach dem Prinzip der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung ergibt sich die Gleichung:

$$l_{x+n} \cdot v^n + l_x \cdot \Pi'_x \Big[(1+i') \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + (1+i')^2 \frac{M_{x+1} - M_{x+n}}{D_x} +$$

$$+ (1+i')^3 \frac{M_{x+2} - M_{x+n}}{D_x} + \ldots + (1+i')^n \frac{M_{x+n-1} - M_{x+n}}{D_x} \Big]$$

$$= l_x \Pi_x \frac{N_{x-1} - N_{x+n-1}}{D_x}.$$

Dividiert man durch l_x rechts und links und beachtet (XI), so folgt:

$$\frac{D_{x+n}}{D_x} + \Pi'_x \Big[(1+i') \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + (1+i')^2 \frac{M_{x+1} - M_{x+n}}{D_x} + \ldots$$

$$+ (1+i')^n \cdot \frac{M_{x+n-1} - M_{x+n}}{D_x} \Big] = \Pi_x \frac{N_{x-1} - N_{x+n-1}}{D_x}.$$

Setzt man für Π'_x den Wert nach (106) ein, so findet man:

$$\Pi_x = \frac{D_{x+n} + \lambda [\quad]}{N_{x-1} - N_{x+n-1} - (1+k) [\quad]}.$$

Die eckige Klammer hat im Zähler wie im Nenner den gleichen Wert:

$$(1+i')(M_x - M_{x+n}) + (1+i')^2 (M_{x+1} - M_{x+n}) +$$

$$+ (1+i')^3 (M_{x+2} - M_{x+n}) + \ldots + (1+i')^n (M_{x+n-1} - M_{x+n}).$$

Die von der V'sanstalt vergüteten Zinsen sind kleiner als die für die Prämienanlage angesetzten rechnungsmäßigen Zinsen anzunehmen, also $i' < i$. Meistens wird eine derartige V., wie wir sie schilderten, so abgeschlossen, daß nur Rückgewähr der Bruttoprämien ohne Verzinsung stattfindet; dann ist $i' = 0$ zu setzen. Die fragliche eckige Klammer wird für $i' = 0$:

$$M_x - M_{x+n} + M_{x+1} - M_{x+n} + M_{x+2} - M_{x+n} + \ldots$$

$$+ M_{x+n-1} - M_{x+n}$$

$$= M_x + M_{x+1} + \ldots + M_{x+n-1} - n\, M_{x+n}.$$

§ 3. Altersbestimmung und Art der Prämienzahlung.

V'en können natürlich zu jeder Zeit des Lebensjahres eingegangen werden. Ist die sich versichernde Person bei Abschluß des Vertrages $x + \frac{m'}{m}$ Jahre alt, wobei $\frac{m'}{m}$ ein positiver echter Bruch ist, so würde es den nach scharf abgegrenzten Altersjahren konstruierten Tafeln, wie 23 D. G. M u. W I (vgl. S. 38), entsprechen, die Prämie aus der des $x$jährigen und des $x + 1$jährigen durch Interpolation zu bestimmen, also die Prämie des $x + \frac{m'}{m}$jährigen gleich der Summe der Prämie des $x$jährigen vermehrt um den $\frac{m'}{m}$ten Teil der Differenz der Prämien des $x + 1$jährigen und des $x$jährigen zu setzen. Dieser Modus kommt in der Praxis der Leibrentenv., jedoch nicht bei der Todesfallv. vor.

Das übliche Verfahren der deutschen Lebensv'sanstalten bei der Todesfallv. ist, daß sie alle Personen des Lebensalters $x - \frac{1}{2}$ bis $x + \frac{1}{2}$ wie $x$jährige versichern, also das Eintrittsalter in die V. immer nach dem zunächst liegenden Geburtstage berechnen (dies entspricht den Normativbestimmungen, siehe S. 15). Nur wenige Anstalten betrachten den nächst höheren Geburtstag als Eintrittsalter in die V., sehen also die sich im Alter von x bis $x + 1$ Jahren versichernden Personen als $x + 1$jährig an.

Bei einmaligei Prämienzahlung ist die Prämie bei Abschluß des Vertrages zu entrichten, bei jährlicher Prämienzahlung ist sie bei Wiederkehr des Termins, an dem die V. eingegangen wurde, fällig; doch gewähren

die meisten Anstalten für die Zahlung der Prämien eine Frist von 30 Tagen und auch Nachfrist.

Die Prämienzahlung geschieht auch bisweilen in kleineren Abständen als einem Jahre. Die Höhe der terminlichen Nettoprämie findet man aus (75), indem man unter **a** die einmalige Nettoprämie für eine terminliche Pränumerandoleibrente auf die Summe 1 versteht. Geht z. B. eine $x$jährige Person eine Todesfallv. auf die Summe 1 mit lebenslänglicher, jedes $\frac{1}{m}$tel Jahr stattfindender, gleichbleibender, bei Abschluß des Vertrages beginnender Prämienzahlung ein, so ist $\mathbf{a} = m \cdot \mathbf{a}_x^{(m)}$ zu setzen; denn $\mathbf{a}_x^{(m)}$ (vgl. XXVII) ist die einmalige Nettoprämie einer Leibrente, welche eine $x$jährige Person alle $\frac{1}{m}$tel Jahre von Beginn des Vertrages bis zum Tode in der gleichen Höhe $\frac{1}{m}$ ausgezahlt erhält, $m \cdot \mathbf{a}_x^{(m)}$ ist daher die Nettoprämie für diese terminliche Leibrente in der Höhe 1.

In der Praxis verfahren die V'sgesellschaften bei Todesfallv'en gewöhnlich so (dies entspricht den auf S. 15 erwähnten Normativbestimmungen), daß sie bei ratenweiser Prämienzahlung die Jahresprämie immer nur als gestundet (einen Teil derselben dem Versicherten geliehen) ansehen und bei der zur Auszahlung gelangenden Sterbesumme die für das V'sjahr, in dem der Tod eintritt, noch nicht gezahlten Prämienraten in Abzug bringen. Bei diesem Modus erleidet die V'sanstalt gegenüber der jährlichen Prämienzahlung dadurch keinen Verlust, daß einer der Versicherten stirbt, ohne für sein Sterbejahr die volle Jahresprämie bezahlt zu haben; für den erlittenen Zinsverlust muß der Versicherte einen

Prämienzuschlag bezahlen. Bei halbjährlicher Prämienzahlung erhebt die V'sanstalt gewöhnlich die Hälfte der um 1 % und bei vierteljährlicher Prämienzahlung den vierten Teil der um 2 % erhöhten Jahresprämie.

VI. Kapitel.

Deckungskapital oder Prämienreserve.

§ 1. Das Deckungskapital nach der Nettomethode.

Selbst wenn eine V'sanstalt ohne Spesen arbeiten und ihr V'sgeschäft sich genau nach den Rechnungsgrößen erster Ordnung, dem rechnungsmäßigen Zins und der Sterbetafel, abwickeln würde, so findet doch im Laufe eines einzelnen Jahres bei Lebens- und Leibrentenv'sanstalten kein Gleichgewicht zwischen den Einnahmen an Nettoprämien und den Auszahlungen versicherter Summen statt. Versichert sich z. B. jemand durch Zahlung einer einmaligen Prämie auf eine lebenslänglich zahlbare Leibrente, so hat die V'sanstalt dem Versicherten gegenüber eine Schuld, die nicht ein Jahr währt, vielmehr erst mit dem Tode des Versicherten ihr Ende nimmt. Läßt man bei einer Todesfallv. den Versicherten eine gleichbleibende Jahresprämie zahlen, so zahlt derselbe in den ersten V'sjahren zu viel für die Deckung des jährlichen Risikos der V., in den späteren Jahren zu wenig; denn je älter das versicherte Leben, desto größer ist, wenn man von den ersten Kinderjahren absieht, die Todesgefahr. Von dem Versicherten wird nur alljährlich eine solche Durchschnittssumme als Prämie erhoben, daß, wenn man ihn als Mitglied einer großen Anzahl gleichaltriger, mit ihm gleichzeitig auf dieselbe Weise versicherter Personen betrachtet, die

Gesamtsumme der von ihm und seinen Genossen zu erzielenden Einnahmen und deren Zinsen für den ganzen Zeitraum der V., nicht aber immer während eines einzelnen Jahres die Ausgaben der V'sanstalt an ihn und seine Genossen deckt. Nur wenn die V'sanstalten ausschließlich V'en gegen natürliche Prämienzahlung (vgl. S. 92) abschließen würden, dürften die jährlich eingenommenen Prämien und deren Zinsen gleich den Ausgaben der V'sanstalt für das betreffende Jahr erwartet werden.

Aus den geschilderten Erwägungen ergibt sich die Notwendigkeit des Deckungskapitals oder der Prämienreserve[1]). Das Deckungskapital ist eine auf mathematischer Schätzung beruhende Rücklage der V'sanstalt, die sie aus dem Plus der ersten oder bei einmaliger Prämienzahlung des ersten V'sjahres und den Zinsen dieser Summen zu machen hat, um, ohne auf die Abschließung neuer Verträge angewiesen zu sein, trotz Mindereinnahmen der folgenden Jahre ihren künftigen Verpflichtungen gegenüber ihren Versicherten nachkommen zu können.

Als Leitsatz für die Bestimmung des Deckungskapitals ergibt sich: Die Anstalt wird offenbar ihre Verpflichtungen erfüllen können, wenn ihr Deckungskapital gleich ist dem Kapitalwert der künftigen Ausgaben der Anstalt im Interesse der V'sfälle minus dem Kapitalwert der noch zu erwartenden Prämieneinnahmen. Das Deckungskapital beruht hier auf der Betrachtung zukünftiger

---

[1]) Wir ziehen mit dem Eidgenöss. V'samt (vgl. die von ihm herausgegebenen Berichte) die Bezeichnung „Deckungskapital" vor, obgleich die Deutsche Reichsgesetzgebung von „Prämienreserve" (vgl. oben S. 13) spricht; mit der Bezeichnung „Prämienreserve" entsteht bei dem Unkundigen leicht die Idee einer Sicherheitsreserve, wohingegen das Deckungskapital oder die Prämienreserve eine Verpflichtung des Versicherers ist und auch in der Bilanz unter den Passiven steht.

Verhältnisse und hat daher prospektiven Charakter. Je nachdem man in dem Leitsatz die Worte „im Interesse der V'sfälle“ und „die zu erwartenden Prämieneinnahmen“ interpretiert, gelangt man zu der Bestimmung des Deckungskapitals nach der Nettomethode oder nach einer anderen.

Die Nettomethode ist die älteste Methode der Bestimmung des Deckungskapitals und die im allgemeinen übliche. Sie berücksichtigt nur die Rechnungsgrundlagen erster Ordnung, d. h. den rechnungsmäßigen Zins und die Sterblichkeit. Sie sieht also von einmaligen und dauernden Unkosten der V. ab, als Ausgaben der V'sanstalt gelten ihr nur die Auszahlungen der versicherten Summen oder Renten, als zu erwartende Prämieneinnahme bloß die Nettoprämien.

Nach der Nettomethode entwickelt sich der Begriff des Deckungskapitals folgendermaßen: Wir nehmen an, daß eine fingierte Gesellschaft von so vielen $x$jährigen Personen, wie sie die Sterblichkeitstafel angibt, nämlich l_x, sich in gleicher Weise versichert. Findet in der fingierten Gesellschaft das Absterben nach der Sterblichkeitstafel statt, so leben nach Verlauf von m Jahren noch l_{x+m} Personen der fingierten Gesellschaft. Im Einklang mit dem Leitsatz ist bei der Nettomethode das Deckungskapital für den am Schluß des $m$ten V'sjahres noch vorhandenen Bestand von l_{x+m} Personen gleich dem Kapitalwert der an die noch lebenden l_{x+m} Personen bzw. deren Erben von der V'sanstalt künftig auszuzahlenden versicherten Summen minus dem Kapitalwert der von den l_{x+m} Personen noch zu erwartenden Nettoprämien. Dieses Deckungskapital am Ende des $m$ten V'sjahres für die l_{x+m} Personen bezeichnen wir, wenn jede einzelne Person auf die Ein-

heit versichert ist, mit ${}_mD_x$ und nennen es das Deckungskapital der ungetrennten fingierten Gesellschaft. Wir leiten ${}_mD_x$ unter der Annahme her, daß die Verzinsung und die Sterblichkeit nach den Rechnungsgrundlagen stattfinden. ${}_mD_x$

Mit $A_{(m)}$ bezeichnen wir im folgenden den v's-mathematischen Barwert aller Summen, welche die V'sanstalt, nachdem sie alle im $m$ten V'sjahre fälligen Summen bereits ausgezahlt hat, für jede der noch am Schluß des $m$ten V'sjahres lebenden l_{x+m} Personen künftig auszuzahlen hat. Die künftigen Verpflichtungen der V'sanstalt an die l_{x+m} Personen betragen demnach $l_{x+m}\,A_{(m)}$. A

Nehmen wir zunächst an, unsere fingierte Gesellschaft habe einen derartigen V'svertrag abgeschlossen, daß m Jahre nach Abschluß der V. und in den folgenden Jahren keine Prämienzahlung mehr stattzufinden hat. In diesem Fall steht den Verpflichtungen der Anstalt, die wir für den Schluß des $m$ten V'sjahres mit $l_{x+m}\,A_{(m)}$ bewertet haben, keine zu erwartende Prämieneinnahme von seiten der noch lebenden l_{x+m} Versicherten gegenüber. Wir finden daher für bereits prämienfreie V'en die Formel

$$ {}_mD_x = l_{x+m}\,A_{(m)}\,. \tag{111}$$

Wir haben noch das Deckungskapital ${}_mD_x$ der ungetrennten fingierten Gesellschaft am Schluß des $m$ten V'sjahres für den Fall zu bestimmen, daß die V'sanstalt noch nach jenem Termin von den Versicherten Prämien zu beanspruchen hat. Die noch fälligen Prämienzahlungen mögen bei Beginn des $(m+1)$ten V'sjahres und, wenn auch noch später, so in jährlichen Terminen und in gleicher Höhe stattfinden. Den Verpflichtungen der V'sanstalt stehen jetzt die von den l_{x+m} Personen noch zu erwartenden Leistungen gegenüber. P_x möge die

jährliche, gleichbleibende Nettoprämie sein, welche eine versicherte $x$jährige Person für die Einheit der ver-
$\mathfrak{a}_{(m)}$ sicherten Summe zu entrichten hat. Unter $\mathfrak{a}_{(m)}$ sei der Barwert oder die Ablösungssumme für die Einheit verstanden, wenn eine $(x+m)$jährige Person diese zum ersten Male sofort und dann alljährlich bis zu demjenigen Lebensalter zahlen muß, bis zu welchem die versicherte $x$jährige Person vertragsmäßig Prämienzahlungen zu leisten hat. Der Barwert der jährlichen Nettoprämien P_x, welche die V'sanstalt noch von jeder der l_{x+m} Personen zu erwarten hat, ist dann offenbar $P_x\,\mathfrak{a}_{(m)}$; von den l_{x+m} Personen hat die Anstalt folglich noch die Einnahme $l_{x+m}\,P_x \cdot \mathfrak{a}_{(m)}$ zu erhoffen. Mithin ergibt sich das Deckungskapital ${}_mD_x$ der ungetrennten fingierten Gesellschaft am Schlusse des $m$ten V'sjahres für die dann noch lebenden l_{x+m} Personen als Differenz:

$$ {}_mD_x = l_{x+m}\,A_{(m)} - l_{x+m}\,P_x\,\mathfrak{a}_{(m)} \,. \qquad (112)$$

Wir haben die Größe ${}_mD_x$ prospektiv gewonnen; sie hatte die Bedeutung: Hat die V'sanstalt am Ende des $m$ten V'sjahres eine Summe in Höhe des Deckungskapitals ${}_mD_x$, so kann sie, wenn alles nach dem Rechnungsschema abläuft, ihren künftigen Zahlungsverpflichtungen an die l_{x+m} Personen nachkommen. Nun sind aber die Nettoprämien gerade so berechnet worden, daß bei gleichzeitiger V. von l_x Personen unter völlig übereinstimmenden V'sbedingungen, wenn das Sterben nach der Sterblichkeitstafel stattfindet und alle Gelder zu dem für die Prämienberechnung gewählten Zinsfuße angelegt werden, die Leistungen der V'sanstalt genau gleich den Leistungen der Versicherten sind. Mithin muß die bis zum $m$ten V'sjahre, dieses eingeschlossen, verflossene Zeit, wenn alles rechnungsmäßig verläuft, der V'sanstalt die An-

sammlung des Deckungskapitals ${}_mD_x$ für die zu jenem Zeitpunkte noch lebenden l_{x+m} Personen gestattet haben. Hieraus ergibt sich folgendes Resultat: Das Deckungskapital ${}_mD_x$ für den am Schluß des $m$ten V'sjahres noch vorhandenen Bestand von l_{x+m} Personen ist gleich dem Kapitalwert, den die bereits von der fingierten Gesellschaft von l_x Personen vereinnahmten Nettoprämien zu jenem Zeitpunkt haben, minus dem Kapitalwert, den die bereits ausgezahlten versicherten Summen zu jenem Termin besitzen.

Das Deckungskapital ${}_mD_x$ erscheint demnach bei der Nettomethode auch als ein aus der Vergangenheit schätzbarer Posten. Man sagt: es ist retrospektiv gewonnen. Es ist zu bemerken, daß sich in praxi natürlich nie die Summe ${}_mD_x$ wirklich ansammelt, da sich ja das Sterben nie genau nach der Sterbetafel vollzieht. ${}_mD_x$ ist also auch bei retrospektiver Herleitung nur eine auf Grund mathematischer Rechnung erzielte Schätzung im Interesse der Zukunft.

Das Deckungskapital ist bisher für einen Bestand von l_{x+m} Personen als Deckungskapital ${}_mD_x$ der ungetrennten fingierten Gesellschaft definiert worden; das Deckungskapital für eine einzelne Person soll der l_{x+m}te Teil dieser Summe sein. Ist die versicherte Summe die Einheit, so bezeichnet man das Deckungskapital am Ende des $m$ten V'sjahres für eine bei Abschluß der V. $x$jährige Person mit ${}_mV_x$ (XXXVI); (XXXVI)
${}_mV_x$ ist dabei immer so zu verstehen, daß alle versicherten Summen, die im Laufe des $m$ten V'sjahres und bei postnumerando zahlbaren Leibrentenv'en am $x+m$ten Geburtstage des Versicherten, d. h. nach Ablauf von m V'sjahren, fällig werden, von der V'sanstalt bereits am Schluß des $m$ten V'sjahres ausgezahlt

sind. ${}_mV_x$ ist auf Grund der Annahme bestimmt, daß der einzelne Versicherte Teil einer großen Anzahl gleicher Risiken ist und bleibt; es ist also nur eine Durchschnittszahl.

Zur Klarstellung geben wir noch ein Beispiel, obgleich die späteren Formeln die Resultate einfacher herzuleiten gestatten: 91 578 Personen des Lebensalters 30, nämlich so viel, wie die am Ende abgedruckte Tafel 23 D. G. M u. W I angibt, mögen eine gemischte V. auf den Todes- und Lebensfall mit dem 60. Lebensjahre als Ablaufsjahr der V. abschließen. Der rechnungsmäßige Zinsfuß sei $3^1/_2\%$, die zugrunde liegende Sterbetafel 23 D. G. M u. W I; die versicherte Summe betrage 1000 Mk. Die Nettoprämie $1000 P_{30\,\overline{30|}}$ beträgt 26,40 Mk. Mithin erhält die Anstalt bei Abschluß des Vertrages 91 578 × 26,40 = 2 417 659,20 Mk. an Nettoprämien. Bei $3^1/_2\%$ Verzinsung trägt diese Summe 84 618,07 Mk. an Zinsen. Am Ende des ersten V'sjahres verfügt die Anstalt demnach über 2 502 277,27 Mk. Im Laufe des ersten V'sjahres sterben nach der Sterbetafel 808 Personen; für diese Todesfälle hat die Anstalt 808 000 Mk. zu zahlen. Demnach besitzt sie, wenn sich alles rechnungsmäßig, wie geschildert, abwickelt, am Ende des ersten V'sjahres $1000\,D_{30} = 2\,502\,277{,}27 - 808\,000 = 1\,694\,277{,}27$ Mk. als Deckungskapital der ungetrennten fingierten Gesellschaft von 90 770 Personen, die nach der Sterbetafel den 31. Geburtstag erleben; auf den einzelnen kommt daher der 90 770. Teil von 1 694 277,27 Mk. = 18,70 Mk. als Deckungskapital. Das auf die Einheit sich beziehende ${}_1V_{30}$ wird gleich 0,01870. Zu Beginn des zweiten V'sjahres erhebt die V'sanstalt wieder von jedem Versicherten 26,40 Mk. als Nettoprämie, hierdurch erhöht sich das Deckungskapital auf 18,70 + 26,40 = 45,10 Mk. Für die 90 770 den 31. Geburtstag erlebenden Personen beträgt demnach das Deckungskapital zu Beginn des 2. V'sjahres 45,10 × 90 770 = 4 093 727 Mk. Bei $3^1/_2\%$ Verzinsung betragen die Zinsen dieser Summe 143 280 Mk. Demnach verfügt die Anstalt am Schluß des zweiten V'sjahres über 4 237 007 Mk. Davon gehen für die 818 im Alter von 31—32 Jahren Verstorbenen 818 × 1000 Mk. ab; mithin beträgt das Deckungskapital $1000\,{}_2D_{30}$ der ungetrennten fingierten Gesellschaft von 89 952 Personen 3 419 007 Mk.; auf den einzelnen Versicherten entfällt das Deckungskapital $\frac{3\,419\,007}{89\,952} = 38{,}00$ Mk.

Da sich ${}_2V_{30}$ auf die Einheit bezieht, ist ${}_2V_{30} = 0{,}038$. So geht es weiter. Nach fünfjähriger V'sdauer würde ${}_5V_{30} = 0{,}100$, nach zehnjähriger ${}_{10}V_{30} = 0{,}21810$, nach fünfzehnjähriger ${}_{15}V_{30} = 0{,}35780$, nach zwanzigjähriger ${}_{20}V_{30} = 0{,}52620$ und nach fünfundzwanzigjähriger ${}_{25}V_{30} = 0{,}73270$ werden. Schließlich wird ${}_{30}V_{30} = 1$.

Das Deckungskapital wurde hier retrospektiv abgeleitet. Stellt man sich auf den prospektiven Standpunkt, so kann man beispielsweise sagen: Die Summe $1000\,{}_2D_{30} = 3\,419\,007$ Mk. würde mit allen künftigen Nettoprämien bei zinstragender Anlegung zu $3^1/_2\,\%$ ausreichen, um den Erben der 34060 Personen, die von unserer fingierten Gesellschaft von 89952 Personen im Alter von 32—60 Jahren sterben, und den 55892 Personen, die den 60. Geburtstag erleben, vertragsgemäß je 1000 Mk. zu zahlen. Hingegen ist $1000\,{}_2V_{30} = 38$ Mk. nur ein Durchschnittswert, nämlich eine in Wirklichkeit für eine sogleich sterbende Person zu niedrige, für eine den 60. Geburtstag erlebende Person zu hohe Rücklage.

Da ${}_mV_x = \dfrac{1}{l_{x+m}}\,{}_mD_x$ ist, ergibt sich nach Formel (111)

für zurzeit prämienfreie V'en: $${}_mV_x = A_{(m)}\,, \tag{113}$$

und nach (112) für zurzeit nicht prämienfreie V'en:

$${}_mV_x = A_{(m)} - P_x\,\mathrm{a}_{(m)}\,. \tag{114}$$

Infolge des Prinzips der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung ist $A_{(m)}$, das die Verpflichtungen der Anstalt mißt, auch die einmalige Nettoprämie, die der zur Zeit der Bestimmung des Deckungskapitals $(x + m)$-jährige zu bezahlen hätte, wenn er sich erst zu jenem Termin für die Zukunft noch dieselben Vorteile der V. auf die Summe 1 verschaffen wollte, die er sich bereits am $x$ten Geburtstage vertragsmäßig ausbedungen hatte. Mithin folgt aus Formel (113): Schließt eine x jährige Person eine derartige V. ab, daß sie zu Beginn des $m + 1$ ten und der folgenden V'sjahre keine Prämien mehr zu zahlen hat, so ist für diese V.

das Deckungskapital am Schluß des $m$ten V'sjahres gleich der einmaligen Nettoprämie einer $x + m$jährigen Person für dieselbe V.

Der gewonnene Satz lehrt im besonderen das Deckungskapital für V'en mit einmaliger Prämienzahlung finden; denn bei einmaliger Prämienzahlung zahlt der Versicherte bei Beginn des zweiten und aller folgenden V'sjahre keine Prämien; es ist daher ${}_mV_x = A_{(m)}$.

Versichert sich eine $x$jährige Person auf eine lebenslänglich, jährlich postnumerando in der gleichen Höhe C zahlbare Leibrente (vgl. S. 55), so ist das Deckungskapital am Schlusse des $m$ten V'sjahres $C\,a_{x+m}$; hierbei ist die am Anfang des $m + 1$ten V'sjahres fällige Rente C bereits am Schluß des $m$ten V'sjahres zur Auszahlung gelangt angenommen.

Fragen wir im Falle einmaliger Prämienzahlung nach dem Deckungskapital am Schlusse des $m$ten V'sjahres für eine postnumerando zahlbare, um t Jahre aufgeschobene Leibrente 1 auf das Leben einer $x$jährigen Person (vgl. S. 62). Die Leibrente ist zum ersten Male bei Erleben des Schlusses des $t+1$ten, dann des $t+2$ten V'sjahres usw. zahlbar anzunehmen. Es ergibt sich: Für $t > m$ wird ${}_mV_x = {}_{t-m|}a_{x+m}$; denn der Versicherte ist zur Zeit der Bestimmung des Deckungskapitals $x + m$jährig, und seine V. ist nach Verlauf von $m < t$ V'sjahren eine nur noch um $t - m$ Jahre aufgeschobene Postnumerandoleibrentenv. Für $t \leqq m$ wird ${}_mV_x = a_{x+m}$.

Versichert sich ein $x$jähriger auf eine $n$jährige temporäre, pränumerando zahlbare Leibrente in der Höhe 1 (vgl. S. 61), so wird das Deckungskapital am Schluß des $m$ten V'sjahres ($m \leqq n - 1$) vor Auszahlung der $(m + 1)$ten Rente ${}_mV_x = {}_{|n-m}\mathbf{a}_{x+m}$; denn der Ver-

sicherte ist alsdann $(x + m)$jährig und die Rente nur noch eine $(n - m)$jährige kurze Pränumerandoleibrente.

Für die einfache Todesfallv. mit einmaliger Prämienzahlung ist das Deckungskapital am Schlusse des $m$ten V'sjahres: ${}_mV_x = A_{x+m}$; denn A_{x+m} ist die einmalige Nettoprämie des $x + m$jährigen für die einfache Todesfallv..

Bei einer Todesfallv. auf die Summe 1 mit jährlicher, gleichbleibender Prämienzahlung bis zur Vollendung des $x + t - 1$ten Lebensjahres (vgl. S. 91) wird für $m \geqq t$, also nach Aufhören der Prämienzahlung, das Deckungskapital am Schlusse des $m$ten V'sjahres auch durch A_{x+m} gegeben.

Bezüglich der Bezeichnung ist noch zu bemerken, daß man häufig das Symbol V für das Deckungskapital analog wie P (vgl. S. 87) mit dem Symbol, welches die einmalige Prämie der V. darstellt, verbindet. Man bezeichnet mit ${}_mV(A_x)$ das Deckungskapital einer einfachen Todesfallv. für einen $x$jährigen auf die Summe 1 nach m Jahren bei einmaliger Prämienzahlung.

Um das Deckungskapital für zurzeit noch nicht prämienfreie V'en näher zu untersuchen, führen wir noch die Bezeichnung $P_{(m)}$ ein; hierunter verstehen wir die jährliche, gleichbleibende Nettoprämie, für welche sich der zur Zeit der Bestimmung des Deckungskapitals $x + m$jährige die Vorteile der noch in Kraft befindlichen, von ihm bereits als $x$jährigem abgeschlossenen V. erkaufen könnte; dabei sollen die Prämienzahlungen für den $x + m$jährigen zu denselben Terminen wie die noch zu erwartenden Prämienzahlungen P_x des $x$jährigen stattfinden. In Analogie mit Formel (75) muß

$$P_{(m)} = \frac{A_{(m)}}{\mathfrak{a}_{(m)}} \qquad (115)$$

sein; denn $P_{(m)}$ bzw. $A_{(m)}$ sind die jährliche bzw. einmalige Nettoprämie für dieselbe V'sart, $\mathfrak{a}_{(m)}$ ist der Barwert der zu denselben Terminen wie $P_{(m)}$ zahlbaren Pränumerandoleibrente. Alle drei Größen beziehen sich, statt wie in (75), auf eine $x$jährige, jetzt auf eine $x+m$-jährige Person. Setzt man $A_{(m)} = P_{(m)}\,\mathfrak{a}_{(m)}$ in Formel (114), so erhält man:

$$_{m}V_{x} = (P_{(m)} - P_{x})\,\mathfrak{a}_{(m)}\,. \tag{116}$$

Diese Formel kann man sich auf folgende Weise deuten: Will der Versicherte von seinem $x+m$ten Geburtstage an alljährlich so lange, wie seine Prämienzahlung stattfindet, pränumerando die Leibrente 1 empfangen, so hat er einer V'sanstalt an seinem $x+m$ten Geburtstage die Summe $\mathfrak{a}_{(m)}$ zu übergeben; für die Summe $(P_{(m)} - P_{x})\,\mathfrak{a}_{(m)}$, welche gleich $_{m}V_{x}$ ist, empfängt er mithin die Leibrente $P_{(m)} - P_{x}$. Hieraus folgt: Übergibt ein $x+m$jähriger einer V'sanstalt das Deckungskapital $_{m}V_{x}$, so braucht er trotz höheren Lebensalters nur die Prämien zu bezahlen, welche er auch hätte bezahlen müssen, wenn er schon als $x$jähriger die V. eingegangen wäre, und ist dennoch ebenso versichert, als wenn er die V. an seinem $x$ten Geburtstage abgeschlossen hätte. Infolge des Besitzes des Deckungskapitals $_{m}V_{x}$ kann die V'sanstalt nämlich als Empfängerin einer jährlichen Leibrente $P_{(m)} - P_{x}$ während der Zeit des Prämienbezuges angesehen werden; kommt hierzu noch die jährliche Prämie P_{x}, so hat die Anstalt jährlich die Summe $P_{(m)}$ zur Verfügung, welche die jährliche Prämienzahlung des $x+m$jährigen ist.

Wir wenden die Formeln (114) und (116) noch auf die einfache und gemischte Todesfallv. an. Für die

einfache Todesfallv. mit jährlicher, gleichbleibender, lebenslänglicher Prämienzahlung ist nach Formel (90)

$P_x = \frac{M_x}{N_{x-1}}$, und es wird

$$ {}_mV_x = A_{x+m} - P_x \cdot \mathrm{a}_{x+m}, \tag{117} $$

$$ {}_mV_x = (P_{x+m} - P_x)\, \mathrm{a}_{x+m}. \tag{118} $$

Da nach (89) $P_x = v - 1 + \frac{1}{\mathrm{a}_x}$ ist, so erhält man aus (118):

$$ {}_mV_x = \left(\frac{1}{\mathrm{a}_{x+m}} - \frac{1}{\mathrm{a}_x}\right) \mathrm{a}_{x+m} $$

oder

$$ {}_mV_x = 1 - \frac{\mathrm{a}_{x+m}}{\mathrm{a}_x}; \tag{119} $$

hiermit ist das Deckungskapital durch Leibrentenwerte ausgedrückt.

Infolge von (20) und (44) erhält man aus (117):

$$ {}_mV_x = \frac{M_{x+m} - P_x N_{x+m-1}}{D_{x+m}}. $$

Da nach (90) $N_{x-1} P_x = M_x$ ist, so läßt sich die voraufgehende Formel auch schreiben:

$$ {}_mV_x = \frac{(N_{x-1} - N_{x+m-1})\, P_x}{D_{x+m}} - \frac{M_x - M_{x+m}}{D_{x+m}}. \tag{120} $$

Diese Formel stellt, wenn man mit $(1+i)^{x+m}$ multipliziert, wie man unter Beachtung von (II), (XII) und (XXII) sieht, in $(N_{x-1} - N_{x+m-1})\, P_x (1+i)^{x+m} = P_x [l_x (1+i)^m + l_{x+1} (1+i)^{m-1} + \ldots + l_{x+m-1} (1+i)]$ alle von einer fingierten Gesellschaft von l_x Personen, die nach der Sterbetafel absterben, in den ersten m V'sjahren vereinnahmten Nettoprämien mit Zinsen und in $(M_x - M_{x+m})(1+i)^{x+m} = d_x (1+i)^{m-1} + d_{x+1} (1+i)^{m-2} + \ldots + d_{x+m-1}$ alle in den ersten m V'sjahren

für V'sfälle gemachten Ausgaben mit Zinsen dar. Die Differenz ist also ein von der Anstalt gesammeltes Kapital. Da $l_{x+m} = D_{x+m}(1+i)^{x+m}$ ist, gibt uns Formel (120) den l_{x+m}ten Teil dieses Kapitals. Wir haben demnach im Einklang mit dem früher auf S. 117 erhaltenen Resultat durch Formel (120) ${}_mD_x = l_{x+m} \cdot {}_mV_x$ direkt retrospektiv aus der Vergangenheit erhalten.

Bei der gemischten Todesfallv. ist, falls die versicherte Summe 1 beim Tode oder spätestens beim Erleben des $x+n$ten Geburtstages zur Auszahlung gelangt und die Prämienzahlung bis zur Vollendung des $x+n-1$ten Lebensjahres dauert, nach (96) die jährliche, gleichbleibende Prämie für eine $x$jährige Person:

$$P_{x\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_{x-1} - N_{x+n-1}}.$$

In Formel (116) wird

$$P_{(m)} = P_{x+m\,\overline{n-m}|} = \frac{M_{x+m} - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_{x+m-1} - N_{x+n-1}}.$$

$\mathbf{a}_{(m)}$ wird ${}_{|n-m}\mathbf{a}_{x+m}$ (vgl. Bezeichnung XV); denn wir haben es hier mit einer $x+m$jährigen Person und einer $n-m$jährigen temporären Pränumerandoleibrente zu tun.

Es ist also nach (116)

$${}_mV_x = (P_{x+m\,\overline{n-m}|} - P_{x\overline{n}|}) \cdot {}_{|n-m}\mathbf{a}_{x+m} \tag{121}$$

und nach (114)

$${}_mV_x = A_{x+m\,\overline{n-m}|} - P_{x\overline{n}|} \cdot {}_{|n-m}\mathbf{a}_{x+m}. \tag{122}$$

Da nach (98) $P_{x\overline{n}|} = (v-1) + \frac{1}{{}_{|n}\mathbf{a}_x}$ ist, folgt für die gemischte Todesfallv. aus (121) in Analogie mit (119)

$${}_mV_x = 1 - \frac{{}_{|n-m}\mathbf{a}_{x+m}}{{}_{|n}\mathbf{a}_x}. \tag{123}$$

Mit Hilfe von (55), (27) und (96) leitet man aus (122) her:

$$ {}_mV_x = \frac{(N_{x-1} - N_{x+m-1})\, P_{x\overline{n}|}}{D_{x+m}} - \frac{M_x - M_{x+m}}{D_{x+m}}. $$

Diese Formel ist analog zu (120) gebaut; sie kann auch direkt aus (120) und den anknüpfenden Entwicklungen hingeschrieben werden, wenn man bedenkt, daß innerhalb der Nettomethode das Deckungskapital ${}_mV_x$ auch retrospektiv bestimmt werden kann und die vereinnahmte Prämie jetzt $P_{x\overline{n}|}$ statt, wie in (120), P_x ist.

Es ist möglich, daß sich bei gewissen V'sarten zeitweilig ein negatives Deckungskapital ergibt, d. h., daß die V'sanstalt zu jenen Zeiten dem Versicherten Gelder vorgeschossen hat, die sie erst durch künftige Prämienzahlungen zurückempfängt. Würde der Versicherte seine V. vorzeitig zu einem Zeitpunkte aufgeben, an dem das Deckungskapital negativ ist, so würde dies für das V'sinstitut verlustbringend sein. Da es nicht Sitte ist, Versicherte für Aufgabe der V., falls sie die bis zu jenem Zeitpunkte fälligen Prämien bezahlt haben, ein Reuegeld erlegen zu lassen, so sollen die V'sanstalten V'en, bei denen das nach der Nettomethode bestimmte Deckungskapital zeitweilig negativ wird, nicht abschließen. Ein negatives Deckungskapital nach der Nettomethode würde sich beispielsweise bei einer Todesfallv. neugeborner Kinder mit lebenslänglicher, jährlicher, gleichbleibender Prämienzahlung ergeben. Wegen der großen Sterbegefahr der Neugeborenen wird für diese V. P_0 nach den meisten Sterbetafeln größer als P_1 und P_2, daher sind ${}_1V_0$ und ${}_2V_0$, wie Formel (116) ergibt, negativ. Versicherte, welche die Nettoprämie P_0 bezahlen würden, hätten also für das große Risiko der V'sanstalt in den ersten V'sjahren später nachzubezahlen.

Auch die im Kap. III, § 10 geschilderte V. kann, wenn sie mit jährlicher, gleichbleibender Prämienzahlung abgeschlossen wird und die Auszahlungssummen mit wachsendem Lebensalter stark abnehmen, zeitweilig negatives Deckungskapital ergeben. Anträge auf derartige V'en soll die versichernde Anstalt abweisen.

§ 2. Spar- und Risikoprämie.

Wir wollen in diesem Paragraphen noch näher untersuchen, wie man sich den Verbrauch der Nettoprämien und die Bildung des Deckungskapitals im V'sbetrieb vorstellen könnte, wenn alles rechnungsmäßig verläuft. Auf Grund dieser mathematischen Konstruktion ist man zu der von juristischer Seite betonten Anschauung der Doppelnatur der Lebensv. als eines Spar- und Risikovertrages gelangt.

Hat eine $x$jährige Person eine V. auf die Summe 1 abgeschlossen, so hat die versichernde Anstalt $m - 1$ Jahre nach Beginn des Vertrages für die betreffende V. das Deckungskapital ${}_{m-1}V_x$ zu Buch stehen. Am Schluß des $m$ten V'sjahres soll das Deckungskapital ${}_mV_x$ betragen; diese Summe hat bei Beginn des $m$ten V'sjahres, also ein Jahr früher, nach Formel (4) den Barwert $v \cdot {}_mV_x$. Die V'sanstalt wird daher am Schluß des $m$ten V'sjahres das Deckungskapital ${}_mV_x$ besitzen, wenn sie bei Beginn des $m$ten V'sjahres außer dem Deckungskapital ${}_{m-1}V_x$ noch die Summe $v \cdot {}_mV_x - {}_{m-1}V_x$ zinstragend zu dem rechnungsmäßigen Zinsfuß anlegt; die zuletzt angegebene Summe $v \cdot {}_mV_x - {}_{m-1}V_x$ wird als Sparprämie bezeichnet. Ist P_x die bei Beginn des $m$ten V'sjahres für das betreffende Jahr von dem Versicherten für die Summe 1 zu zahlende Nettoprämie, so

entnimmt die V'sanstalt der Prämie P_x die Sparprämie $v \cdot {}_mV_x - {}_{m-1}V_x$; der noch übrigbleibende Rest $P_x - (v \cdot {}_mV_x - {}_{m-1}V_x)$ kann bei Sterbensv'en als zur Deckung des Risikos der V. während des betreffenden Jahres bestimmt angesehen werden und heißt Risikoprämie.

Hat der sich im Alter von x Jahren Versichernde z. B. eine Todesfallv. mit jährlich gleichbleibender, lebenslänglicher Prämienzahlung auf die Summe 1 abgeschlossen, so ist das Deckungskapital nach Formel (117):

$$ {}_mV_x = A_{x+m} - P_x \cdot \mathbf{a}_{x+m}, $$

also

$$ {}_{m-1}V_x = A_{x+m-1} - P_x \cdot \mathbf{a}_{x+m-1}. $$

Unter Benützung von (47) und (19) wird:

$$ {}_{m-1}V_x = v\,(q_{x+m-1} + p_{x+m-1}\,A_{x+m}) - P_x\,(1 + a_{x+m-1}). $$

Mit Hilfe von (15) ergibt sich:

$$ {}_{m-1}V_x = v(q_{x+m-1} + p_{x+m-1}A_{x+m}) - P_x[1 + p_{x+m-1}v(1 + a_{x+m})] $$
$$ = v\,p_{x+m-1}\,[A_{x+m} - P_x\,(1 + a_{x+m})] + v\,q_{x+m-1} - P_x. $$

Infolge der Formel (19) und (117) wird:

$$ {}_{m-1}V_x = v\,p_{x+m-1} \cdot {}_mV_x + v\,q_{x+m-1} - P_x. \qquad (124) $$

Hieraus folgt, daß die Risikoprämie

$$ P_x - (v \cdot {}_mV_x - {}_{m-1}V_x) $$
$$ = P_x - v \cdot {}_mV_x + v\,p_{x+m-1} \cdot {}_mV_x + v\,q_{x+m-1} - P_x $$
$$ = v \cdot {}_mV_x\,(p_{x+m-1} - 1) + v\,q_{x+m-1} $$

oder mit Benützung von (7) gleich

$$ -v \cdot {}_mV_x\,q_{x+m-1} + v\,q_{x+m-1} = v\,q_{x+m-1}\,(1 - {}_mV_x) \text{ wird.} $$

Stirbt der Versicherte im $m$ten V'sjahre, so hat die V'sanstalt am Schluß des $m$ten V'sjahres für den Versicherten das Deckungskapital ${}_mV_x$ gesammelt; da die zu leistende Zahlung 1 ist, so muß das V'sinstitut die

vorhandene Summe ${}_mV_x$ durch den Betrag $1 - {}_mV_x$ ergänzen. Die Summe $1 - {}_mV_x$ heißt das reduzierte, versicherte Kapital. Da der Versicherte in das $m$te V'sjahr $x + m - 1$jährig tritt, so ist die Risikoprämie $v\,q_{x+m-1}(1 - {}_mV_x)$ nach S. 92 gleich der natürlichen Prämie des $x + m - 1$jährigen für das reduzierte Kapital. Bei der Todesfallv. mit jährlich gleichbleibender, lebenslänglicher Prämienzahlung kann man die alljährlich vereinnahmte Nettoprämie in zwei Summanden zerlegt denken, nämlich die Sparprämie zur Ansammlung des Deckungskapitals und die Risikoprämie, die es der V'sanstalt ermöglicht, bei früherem Tode des Versicherten das Deckungskapital zu der vertragsmäßig festgesetzten Summe zu ergängen. Die zwei Summanden, in welche die Prämie P_x gespalten wurde, ändern sich von Jahr zu Jahr.

Die gleichen Verhältnisse wie bei der Todesfallv. mit jährlich gleichbleibender Prämienzahlung liegen bei der gemischten Todesfallv. mit jährlich gleichbleibender Prämienzahlung vor. Auch hier gilt nämlich die Formel (124) unverändert, da die Formeln (117) und (47) nur durch die gleichgebauten Relationen (122) und (59) zu ersetzen sind.

Schließt eine $x$jährige Person eine einfache Todesfallv. auf die Summe 1 gegen einmalige Prämienzahlung ab, so ist das Deckungskapital ${}_mV_x = A_{x+m}$ (vgl. S. 121). Die Sparprämie $v \cdot {}_mV_x - {}_{m-1}V_x$ wird daher gleich $v\,A_{x+m} - A_{x+m-1}$ oder unter Benützung von Formel (47):

$$v\,A_{x+m} - v\,(q_{x+m-1} + p_{x+m-1}\,A_{x+m})$$
$$= v\,A_{x+m}(1 - p_{x+m-1}) - v\,q_{x+m-1}$$
$$= v\,A_{x+m}\,q_{x+m-1} - v\,q_{x+m-1} = v\,q_{x+m-1}(A_{x+m} - 1)\,.$$

Zu Beginn des $m$ten V'sjahres ($m > 1$) nimmt die V'sanstalt von dem Versicherten keine Prämien ein; daher ist bei der Risikoprämie für die Todesfallv. mit einmaliger Prämienzahlung $P_x = O$ zu setzen. Die Risikoprämie wird $-v \cdot {}_mV_x + {}_{m-1}V_x = v\, q_{x+m-1}(1 - A_{x+m})$. Am Schlusse des $m$ten V'sjahres hat die V'sanstalt für die geschilderte V. das Deckungskapital A_{x+m}; mithin ist zu diesem Zeitpunkte das reduzierte versicherte Kapital $1 - A_{x+m}$. Die Risikoprämie $v\, q_{x+m-1}(1 - A_{x+m})$ stellt folglich die natürliche Prämie des $x + m - 1$-jährigen für das reduzierte Kapital am Ende des $m$ten V'sjahres dar. Da $1 > A_{x+m}$ ist, so ist die Sparprämie $v\, q_{x+m-1}(A_{x+m} - 1)$ negativ. Diese Tatsache erklärt sich auf folgende Weise: Das am Schlusse des $m - 1$ten V'sjahres vorhandene Deckungskapital ${}_{m-1}V_x = A_{x+m-1}$ wächst im Laufe eines Jahres nach Formel (1) zu

$(1 + i) \cdot {}_{m-1}V_x = \frac{A_{x+m-1}}{v}$ an. Nach Formel (47) wird

$$\begin{aligned}\frac{A_{x+m-1}}{v} &= q_{x+m-1} + p_{x+m-1}\, A_{x+m} \\ &= q_{x+m-1} + (1 - q_{x+m-1})\, A_{x+m} \\ &= A_{x+m} + q_{x+m-1}(1 - A_{x+m})\,.\end{aligned}$$

Am Schlusse des $m$ten V'sjahres braucht nur das Deckungskapital A_{x+m} vorhanden zu sein. Wird das Deckungskapital ${}_{m-1}V_x = A_{x+m-1}$ zinstragend angelegt, so hat die V'sanstalt am Schlusse des $m$ten V'sjahres außer dem Deckungskapital A_{x+m} noch die Summe $q_{x+m-1}(1 - A_{x+m})$, die zu Beginn des $m$ten V'sjahres, also ein Jahr früher, den Barwert $v\, q_{x+m-1}(1 - A_{x+m})$ hatte, zur Verfügung. Diese überschüssige Summe $v\, q_{x+m-1}(1 - A_{x+m})$ ist gleich $v\, q_{x+m-1}(1 - {}_mV_x)$, also die Risikoprämie für das

$m$te V'sjahr; durch zinstragende Anlegung dieser Summe kann das versichernde Institut die Auszahlungen für die im Laufe des $m$ten V'sjahres stattfindenden Sterbefälle am Ende desselben leisten.

Betrachten wir noch die Erlebensv. des $x$jährigen auf die Summe 1 gegen einmalige Prämienzahlung, wie wir sie S. 65 behandelt haben. Das Deckungskapital ${}_mV_x$ wird gleich ${}_{n-m}E_{x+m}$ oder nach Formel (39) $\frac{l_{x+n}}{l_{x+m}} v^{n-m}$. Die Sparprämie $v \cdot {}_mV_x - {}_{m-1}V_x$ wird

$$v \cdot \frac{l_{x+n}}{l_{x+m}} v^{n-m} - \frac{l_{x+n}}{l_{x+m-1}} v^{n-m+1}$$

$$= v^{n-m+1} \cdot \frac{l_{x+n}}{l_{x+m-1}} \cdot \frac{l_{x+m-1} - l_{x+m}}{l_{x+m}}.$$

Unter Benützung von (VI) wird die Sparprämie

$$v^{n-m+1} \cdot \frac{l_{x+n}}{l_{x+m-1}} \cdot \frac{d_{x+m-1}}{l_{x+m}}.$$

Die Risikoprämie ist, da einmalige Prämienzahlung stattfindet,

$$-(v\, {}_mV_x - {}_{m-1}V_x) = -v^{n-m+1} \cdot \frac{l_{x+n}}{l_{x+m-1}} \cdot \frac{d_{x+m-1}}{l_{x+m}};$$

sie hat also negativen Wert. Dies erklärt sich auf folgende Art: Das Deckungskapital bei Beginn des $m$ten V'sjahres ist bei der zu untersuchenden Erlebensv. ${}_{m-1}V_x = v^{n-m+1} \cdot \frac{l_{x+n}}{l_{x+m-1}}$. Von der fingierten Gesellschaft von l_x Personen sterben im Laufe des $m$ten V'sjahres d_{x+m-1} Personen; das Deckungskapital dieser d_{x+m-1} Personen, das $d_{x+m-1} \cdot v^{n-m+1} \cdot \frac{l_{x+n}}{l_{x+m-1}}$ beträgt, fällt bei der Erlebensv. an die V'sanstalt und ist von

dieser zur Erhöhung des Deckungskapitals der l_{x+m} Personen, die nach dem Grundschema das $m$te V'sjahr überleben, zu verwenden. Für eine Person kann also die V'sanstalt bei Beginn des $m$ten V'sjahres darauf rechnen, den l_{x+m}ten Teil der Summe

$$d_{x+m-1} \cdot v^{n-m+1} \frac{l_{x+n}}{l_{x+m-1}}, \text{ also } \frac{d_{x+m-1}}{l_{x+m}} \cdot \frac{l_{x+n}}{l_{x+m-1}} v^{n-m+1},$$

zur Verfügung zu haben, d. i. bis auf das Vorzeichen der Wert der Risikoprämie. Das negative Vorzeichen drückt aus, daß die Risikoprämie von der V'sanstalt fortzustellen, nicht etwa auszuzahlen ist. Durch zinstragende Anlegung des Deckungskapitals ${}_{m-1}V_x$ und der Summe $v^{n-m+1} \cdot \frac{d_{x+m-1}}{l_{x+m}} \cdot \frac{l_{x+n}}{l_{x+m-1}}$ während eines Jahres wird das Deckungskapital ${}_mV_x$ erhalten; denn die oben für die Risikoprämie hergeleitete Gleichung läßt sich auch schreiben:

$${}_mV_x = \frac{1}{v}\left({}_{m-1}V_x + v^{n-m+1} \cdot \frac{d_{x+m-1}}{l_{x+m}} \cdot \frac{l_{x+n}}{l_{x+m-1}}\right).$$

Es ist wohl kaum nötig, nochmals hervorzuheben, daß in diesem Paragraphen ebenso wie im vorigen bei den Betrachtungen über das Deckungskapital ausschließlich rechnungsmäßiger Verlauf nach dem Grundschema angenommen wurde[1]).

§ 3. Das Deckungskapital nach der Methode der ausreichenden Prämien. Das Zillmersche Deckungskapital. Die Unkostenreserve.

Jede Anstalt arbeitet, wie wir sahen, mit einmaligen und jährlich wiederkehrenden Unkosten. Berücksichtigt

[1]) Eine ganz allgemeine Behandlung der hier angeschnittenen Frage gibt v. Bortkiewicz in seinem Aufsatz „Risiko- und Sparprämie bei Lebens-V'en auf eine Person“, Assekuranzjahrbuch, Jahrg. 24 (1903).

man dieses unvermeidliche Element des V'sbetriebes in dem Leitsatz, den wir auf S. 113 für die Bestimmung des Deckungskapitals aufstellten, so gelangt man zu dem Deckungskapital nach dem Prinzip der ausreichenden Prämien und hiermit zu dem Zillmerschen Deckungskapital.

Bei der Methode der ausreichenden Prämie wird das Deckungskapital am Schluß des $m$ten V'sjahres definiert als gleich dem Kapitalwert der künftig auszuzahlenden versicherten Summen und künftigen jährlichen Unkosten minus dem Kapitalwert der noch zu erwartenden ausreichenden Prämien.

Wir wenden diesen Satz zunächst an, um das Deckungskapital einer V. zu bestimmen, für die alljährlich, solange der Vertrag läuft, Prämienzahlung stattfindet. Die jährliche ausreichende Prämie für die Einheit der versicherten Summe sei wie oben S. 98 mit P'_x bezeichnet. Die jährlichen Unkosten mögen für die Einheit der versicherten Summe $\gamma P'_x$ betragen (vgl. S. 98). Diese jährlichen Unkosten repräsentieren bei Beginn des $(m+1)$ten V'sjahres den Wert $\gamma P'_x \mathrm{a}_{(m)}$; denn $\mathrm{a}_{(m)}$ war der Kapitalwert (vgl. S. 116) der Einheit, wenn diese vom $(x+m)$ten Geburtstage des Versicherten an alljährlich so lange zu zahlen ist, als nach dem Vertrage Prämienzahlungen stattfinden.

Das Deckungskapital am Schlusse des $m$ten Jahres nach der Methode der ausreichenden Prämie bezeichnen wir für die Einheit der versicherten Summe mit ${}_mV'_x$
(XXXVII) (XXXVII).

In Analogie mit Formel (114) finden wir:

$$ {}_mV'_x = A_{(m)} + \gamma P'_x \mathrm{a}_{(m)} - P'_x \mathrm{a}_{(m)} ; \qquad (125)$$

denn zu dem Kapitalwert $A_{(m)}$ der Auszahlungen für

versicherte Summen tritt noch $\gamma P'_x \mathfrak{a}_{(m)}$, der Kapitalwert der Aufwendungen der Anstalt für jährliche Unkosten; in dem zu subtrahierenden Teil gelten jetzt nicht wie bei der Nettomethode die Nettoprämien P_x, sondern die ausreichenden Prämien P'_x als jährliche Einnahme der V'sanstalt.

Nach (99) ist
$$P'_x = P_x + \gamma P'_x + \frac{\delta}{\mathfrak{a}};$$
mithin wird (125) übergehen in:
$${}_mV'_x = A_{(m)} + \gamma P'_x \mathfrak{a}_{(m)} - \left(P_x + \gamma P'_x + \frac{\delta}{\mathfrak{a}}\right) \mathfrak{a}_{(m)}$$
$$= A_{(m)} - \left(P_x + \frac{\delta}{\mathfrak{a}}\right) \mathfrak{a}_{(m)}\,. \tag{126}$$

Vergleicht man diese Formel mit (114), so erhält man:
$${}_mV'_x = {}_mV_x - \frac{\delta}{\mathfrak{a}} \mathfrak{a}_{(m)}\,. \tag{127}$$

Analog zu Formel (116) erhält man:
$${}_mV'_x = \left(P_{(m)} - P_x - \frac{\delta}{\mathfrak{a}}\right) \mathfrak{a}_{(m)}\,. \tag{128}$$

Das durch Formel (126) bestimmte Deckungskapital ${}_mV'_x$ für eine V. mit jährlicher Prämienzahlung während der ganzen V'sdauer wird nach dem S. 17 genannten Dr. Zillmer als Zillmersches Deckungskapital bezeichnet.

Nach seiner Bedeutung wird $\mathfrak{a}_{(m)}$, abgesehen von V'en, die in den frühesten, durch außergewöhnlich große Sterblichkeit sich auszeichnenden Kinderjahren abgeschlossen werden, mit wachsendem m kleiner und kleiner, so daß das Zillmersche Deckungskapital sich dem Deckungskapital nach der Nettomethode mehr und mehr nähert, wie die Formel (127) lehrt. Schließlich

erreicht das Zillmersche Deckungskapital das nach der Nettomethode gewonnene.

Um das letztere näher zu beleuchten, nehmen wir an, es finde $t$malige, jährliche, gleichbleibende Prämienzahlung statt. Nach (126) wird:

$$_{t-1}V'_x = A_{(t-1)} - \left(P_x + \frac{\delta}{\mathrm{a}}\right) \mathrm{a}_{(t-1)} \,. \qquad (126')$$

Bei $t$maliger Prämienzahlung ist offenbar $\mathrm{a}_{(t-1)}$ seiner Bedeutung nach gleich 1. Daher geht (126′) über in:

$$_{t-1}V'_x = A_{(t-1)} - \left(P_x + \frac{\delta}{\mathrm{a}}\right) . \qquad (129)$$

Zu Beginn des $t$ten V'sjahres, unmittelbar nach dem Zeitpunkt, für welchen wir $_{t-1}V'_x$ berechneten, ist noch die ausreichende Prämie P'_x fällig; diese hat nach (99) den Wert $P_x + \gamma P'_x + \frac{\delta}{\mathrm{a}}$. Von dieser ausreichenden Prämie P'_x ist der Teil $\gamma P'_x$ für die jährlichen Verwaltungskosten zu verwenden. Mithin verbleibt noch $P_x + \frac{\delta}{\mathrm{a}}$. Man nennt $P_x + \frac{\delta}{\mathrm{a}}$ die Reserveprämie. Führt man die Reserveprämie dem durch (129) bestimmten Deckungskapital zu, so wird dieses gleich $A_{(t-1)}$. Denselben Effekt ergibt auch die Nettomethode; denn es ist $_{t-1}V_x + P_x = A_{t-1}$, und bei der Nettomethode ist nur die Nettoprämie P_x zu verwenden.

Wir gelangten mit Höckner[1]) infolge des Prinzips der ausreichenden Prämien zu dem durch Formel (126) gegebenen Zillmerschen Deckungskapital. Zillmer[2]) selbst

[1]) Die Schriften von Höckner findet man auf S. 97 zitiert. Vgl. auch den historischen und kritischen Aufsatz von Engelbrecht, Das Deckungskapital in der Lebensv., Zeitschr. f. d. ges. V'swissenschaft, Bd. 7, S. 611 (1907).

[2]) Von Zillmer sind zu nennen: Beiträge zur Theorie der Prämien-

kam durch alleinige Betrachtung der mit der Anwerbung einer V. verknüpften ersten Unkosten zu seiner Formel. Trotz der mit dem Abschluß einer V. verbundenen Anwerbekosten erhält die versichernde Anstalt bei jährlich gleichbleibender Prämienzahlung im ersten V'sjahre keine höhere Bruttoprämie als in den folgenden Jahren. Die Differenz zwischen einer Bruttoprämie und Nettoprämie reicht nicht zur Deckung der Anwerbekosten. Um diese zu beschaffen, nimmt man sie auf folgende Weise über die ganze V'sdauer verteilt an: Ist δ die Höhe der ersten Unkosten für die Einheit der versicherten Summe, so kann man dem Versicherten den Betrag δ aus dem Bankvermögen mit der Verpflichtung vorgeschossen denken, daß er diesen Betrag durch jährliche Zahlungen zu tilgen hat. Aus der Gleichung (99) für die ausreichende Prämie:

$$P'_x = P_x + \gamma P'_x + \frac{\delta}{\mathbf{a}},$$

bei der P_x die Nettoprämie und $\gamma P'_x$ die jährlichen Unkosten sind, folgt, daß eine jährliche Zahlung im Betrag $\frac{\delta}{\mathbf{a}}$ die einmaligen Unkosten decken muß. Man gelangt demnach auch zu Formel (126), wenn man das Deckungskapital definiert als Differenz des Barwertes $A_{(m)}$ der von der V'sanstalt auszuzahlenden Summen und des Barwertes der jährlichen Einnahme; als solche wird hier die Nettoprämie P_x angesehen, vermehrt um die Tilgungsquote $\frac{\delta}{\mathbf{a}}$, die der Versicherte zur Ablösung

reserve, Stettin 1863; Die rationelle Deckung der Abschlußkosten in der Lebensv., Assekuranzjahrbuch, Jahrg. 2 (1881); ferner seine Erwiderung zur Widerlegung eines Artikels von Heym in den Jahrbüchern f. Nationalökonomie und Statistik, Bd. 5 der neuen Folge, Jahrg. 1882.

der ihm als vorgeschossen zu denkenden Summe δ, der ersten Unkosten, alljährlich in seiner Bruttoprämie mitbezahlt.

Das Zillmersche Deckungskapital kann negativ werden; dies würde heißen, daß auf der V. noch ein Vorschuß ruht oder die ausgegebenen Erwerbskosten und die Verwaltungskosten des ersten Jahres, vermehrt um das Risiko des ersten V'sjahres, die jährliche ausreichende Prämie übersteigen. Negatives ${}_mV'_x$ ergibt sich, wenn in Formel (127) $\frac{\delta}{\mathfrak{a}}\,\mathfrak{a}_{(m)} > {}_mV_x$ wird, d. h. δ zu hoch ist. Da die Deckungskapitalien bei Todesfall-v'en mit der Zeit wachsen, so treten keine negativen Deckungskapitalien auf, wenn bereits nach einem Jahre das Deckungskapital ${}_1V'_x$ nicht kleiner als Null wird. Nach (128) ist:

$${}_1V'_x = \left(P_{(1)} - P_x - \frac{\delta}{\mathfrak{a}}\right)\mathfrak{a}_{(1)}\,;$$

da $\mathfrak{a}_{(1)} \neq 0$ ist, so folgt, wenn ${}_1V'_x = 0$ gesetzt wird,

$$P_{(1)} - P_x - \frac{\delta}{\mathfrak{a}} = 0 \quad \text{oder} \quad \delta = \mathfrak{a}\,(P_{(1)} - P_x)\,. \tag{130}$$

Das durch (130) bestimmte δ heißt das Zillmersche Maximum der ersten Unkosten; die ersten Unkosten sollen pro Einheit der versicherten Summe, wie Zillmer verlangt, $\mathfrak{a}\,(P_{(1)} - P_x)$ nicht übersteigen; ob ein unterhalb $\mathfrak{a}\,(P_{(1)} - P_x)$ gewähltes δ für die Praxis immer ausreicht, um die ersten Unkosten zu decken, ist eine andere Frage.

Wählt man δ aus (130), so wird Formel (126) ergeben:

$${}_mV'_x = A_{(m)} - (P_x + P_{(1)} - P_x)\,\mathfrak{a}_{(m)} = A_{(m)} - P_{(1)}\,\mathfrak{a}_{(m)}\,. \tag{131}$$

$P_{(1)}$ ist die Nettoprämie des $x+1$jährigen; die rechte Seite der Formel (131) unterscheidet sich von

derjenigen der Formel (114) nur dadurch, daß statt der Nettoprämie des $x$jährigen die des $x+1$jährigen getreten ist. Man bezeichnet daher die besprochene Methode, wenn für δ das Zillmersche Maximum der ersten Unkosten gewählt wird, als $x+1$ Methode.

Das Deckungskapital wird bei der Zillmerschen Methode kleiner als bei der Nettomethode; trotzdem ist es bei sorgfältiger Wahl von Zins und Sterblichkeitstafel ausreichend. Neue V'sgesellschaften, welche von den Begründern kein Patengeschenk zur Bestreitung der ersten Unkosten für die neu abzuschließenden V'en erhalten, können ohne Zillmerei kaum auskommen; alte Gesellschaften allerdings können die Anwerbekosten der neuen V'en aus ihren früheren Ersparnissen decken und das Zillmern entbehren. Steht man auf dem Standpunkt, daß jede V. mit den von ihr verursachten Kosten zu belasten ist, also nicht die Überschüsse der alten Generation von Versicherten zur Deckung der Anwerbung für die Neuversicherten herangezogen werden sollen, so dient das Zillmern auch einer gesunden Geschäftspolitik. Deckt man die ersten Unkosten für die bei einer alten Anstalt Neuzugegangenen aus dem Geschäftsüberschuß, so werden die Dividenden der alten Versicherten verringert; bei ungewöhnlich großem Eintritt neuer Versicherter könnte die Anstalt ohne Zillmern, indem sie ihre Deckungskapitalien nach der Nettomethode zurücklegt, sogar zu einem Defizit gelangen und schließlich gezwungen werden, die Anwerbung einzudämmen.

Die Aufsichtsbehörden waren der Zillmerschen Methode bisher nicht sehr günstig. Hält man darauf, daß das Zillmersche Deckungskapital nicht negativ wird, weil man ja keine Zwangsmaßregeln hat, die Versicherten mindestens so lange zum Ausharren beim Vertrag zu

zwingen, bis diese Schuld abgetragen ist, so ist gegen das Zillmern nichts einzuwenden; es hat sogar bei sorgsamer Wahl von Sterblichkeitstafeln und Zins, wie wir oben ausführten, seine Vorzüge. Das deutsche Reichsgesetz nimmt einen vermittelnden Standpunkt ein und gestattet ein Zillmern bis $12^1/_2$ pro Mille der versicherten Summe (vgl. S. 13), d. h. man darf in den Formeln (126) bis (128) für δ den Wert 0,0125 oder einen kleineren setzen.

Wir wenden das Prinzip der ausreichenden Prämien noch an, um das Deckungskapital ${}_mV'_x$ am Schluß des $m$ten V'sjahres für eine zu diesem Zeitpunkt prämienfreie V. zu bestimmen. Die jährlichen Unkosten der V'sanstalt für die Einheit der versicherten Summe seien u. Da diese vom $(x+m)$ten Geburtstag des Versicherten an alljährlich, solange der V'svertrag läuft, aufzuwenden sind, so haben sie den Wert $u\,\mathfrak{a}_{(m)}$; hierbei ist $\mathfrak{a}_{(m)}$ die Ablösungssumme für die Einheit, die eine $(x+m)$jährige Person alljährlich bis ein Jahr vor Ablauf des V'svertrages zu zahlen hat. Der Kapitalwert aller Ausgaben der V'sanstalt für V'sleistungen ist $A_{(m)}$. Mithin wird, da die Anstalt keine Einnahmen mehr zu erwarten hat, das Deckungskapital als Summe aus dem Kapitalwert der künftig auszuzahlenden versicherten Summen und der künftigen jährlichen Unkosten sich ergeben als

$$ {}_mV'_x = A_{(m)} + u\,\mathfrak{a}_{(m)}\,. \tag{132} $$

Die Methode der ausreichenden Prämien führt bei zur Zeit der Bestimmung des Deckungskapitals prämienfreien V'en, wie der Vergleich von Formel (132) mit (113) lehrt, zu einem höheren Deckungskapital. Man bezeichnet den Summanden $u\,\mathfrak{a}_{(m)}$ in Formel (132) als

Unkostenreserve; sie gestattet, die Verwaltungskosten während der prämienfreien Zeit zu decken.

§ 4. Rückkauf und Umwandlung in eine prämienfreie Versicherung.

Häufig kommt es vor, daß ein Versicherter aus irgendwelchen Gründen seine Prämienzahlung einstellt. Hat die V'sanstalt möglicherweise überhaupt keine Leistungen zu gewähren (frühzeitiger Tod des Versicherten bei der Erlebensv. oder der Rentenv.), so zahlt sie, an diese Möglichkeit denkend, keine sogenannte Abgangsentschädigung. Die Prämien sind bei diesen V'sgattungen mit bedingter Leistungsfähigkeit so bestimmt, daß mit dem Nichteintritt des V'sfalles gerechnet wird und die Anstalt das Deckungskapital derjenigen Elemente, für welche ihre Verpflichtungen infolge von Tod fortfallen, zur Erhöhung des Deckungskapitals der Überlebenden benötigt. Die Gefahr des Austrittes Kranker, die vermuten, vor dem Termin des Eintrittes des V'sfalles zu sterben, und noch soviel wie möglich retten möchten, verbietet, den Rückkauf zuzulassen. Eine Abgangsentschädigung oder, wie man sagt, ein Rückkaufspreis wird nur für diejenigen V'sarten gewährt, bei denen die versicherte Summe unter allen Umständen zur Auszahlung gelangt. Die Höhe des Rückkaufpreises einer derartigen V. wird gewöhnlich auf Grund des Deckungskapitals, das an dem fraglichen Zeitpunkte auf die betr. V. fällt, bestimmt. Zwar ist das Deckungskapital einer einzelnen V. eigentlich nicht als Eigentum des betr. Versicherten zu betrachten, sondern stellt nur einen Durchschnittswert dar, der ausschließlich mit Rücksicht auf eine Gesamtheit gleichaltriger, gleichzeitig unter denselben Bedingungen Ver-

sicherter bestimmt wurde; aber bei Aufgabe einer V. hört deren Deckungskapital in den Büchern der Anstalt auf. Daher wird das Deckungskapital wohl mit Recht als Grundlage für die Abgangsentschädigung gewählt. Die einseitige Lösung des V'svertrages kann den V's-bestand unter die notwendige Größe herabmindern; bei der Todesfallv. vergrößert sich durch den Austritt Gesunder das Gesamtrisiko, ferner entgeht der V's-anstalt durch Einstellen der Prämienzahlung auch der als dauernd angenommene Zuschlag zur Nettoprämie, durch den Rückkauf entsteht der Anstalt zudem Arbeit. Infolgedessen findet bei Aufgabe der V. in den ersten Jahren überhaupt keine Entschädigung statt; später wird der Versicherte durch einen gewissen konstanten oder einen mit der V'sdauer steigenden Prozentsatz des Deckungskapitals entschädigt. Die gewährte Vergütung heißt Rückkaufswert. § 176 des deutschen Reichsgesetzes über den V'svertrag bestimmt für V'sverhältnisse, die mindestens 3 Jahre bestanden haben: „Wird eine Kapitalv. für den Todesfall, die in der Art genommen ist, daß der Eintritt der Verpflichtung des Versicherers zur Zahlung des vereinbarten Kapitals gewiß ist, durch Rücktritt oder Kündigung aufgehoben, so hat der Versicherer den Betrag der auf die V. entfallenden Prämienreserve zu erstatten.“ „Der Versicherer ist zu einem angemessenen Abzug berechtigt.“ Aus der Zahlung eines Rückkaufpreises folgt auch, daß die V'sanstalt dem Versicherten seine Police, wie man den V'svertrag bezeichnet, bis zur Höhe des Rückkaufswertes beleihen kann. Man spricht dann von einem Policendarlehen.

Sind für eine V. drei Jahre laufende Prämien bezahlt, so besagt § 174 des deutschen Reichsgesetzes über den V'svertrag: „Der V'snehmer kann jederzeit für den

Schluß der laufenden V'speriode die Umwandlung der V. in eine prämienfreie V. verlangen. Wird die Umwandlung verlangt, so tritt mit dem bezeichneten Zeitpunkt an die Stelle des vereinbarten Kapital- oder Rentenbetrages der Betrag, der sich für das Alter desjenigen, auf dessen Person die V. genommen ist, als Leistung des Versicherers ergibt, wenn die auf die V. entfallende Prämienreserve als einmalige Prämie angesehen wird." Die Umwandlung einer V. mit bedingter Leistungspflicht in eine prämienfreie V. beraubt die Anstalt nicht des Deckungskapitals sie ist also etwas wesentlich anderes als der Rückkauf. Bei der Umwandlung von Todesfallv'en mit unbedingter Auszahlung kommt gewöhnlich das volle Deckungskapital (so nach den Normativbestimmungen, Zitat S. 15) — nach dem neuen deutschen Reichsgesetz wäre der Versicherer zu einem angemessenen Abzug berechtigt — in Anwendung, und zwar wird es als einmalige Prämie benützt.

Beispiel: Die im Alter x abgeschlossene einfache Todesfallv. auf das Kapital C soll am Ende des $m$ten V'sjahres in eine prämienfreie umgewandelt werden. Welche Summe bleibt versichert? Das Deckungskapital am Ende des $m$ten V'sjahres beträgt $C \cdot {}_mV_x$. Durch einmalige Zahlung der Summe A'_{x+m}, wobei A'_{x+m} die einmalige Bruttoprämie des $x+m$jährigen für die Todesfallv. auf die Summe 1 bedeutet, ist die Summe 1 versichert. Durch die Summe $C \cdot {}_mV_x$ ist mithin die Summe $\frac{C \cdot {}_mV_x}{A'_{x+m}}$ versichert. Die beitragsfreie Police kann daher auf diese Summe ausgeschrieben werden.

VII. Kapitel.

Die Bilanz.

§ 1. Aktiva und Passiva.

Alljährlich hat eine V'sanstalt eine Bilanz, d. h. eine Übersicht über ihre Aktiva und Passiva, aufzustellen, was gewöhnlich mit Schluß des Kalenderjahres geschieht. Zweck der Bilanz ist, die Solvenz des Instituts darzutun. Zu den Passiven gehören in erster Reihe die Deckungskapitalien der einzelnen V'en, deren Gesamtheit als das Deckungskapital oder die Prämienreserve der V'sanstalt bezeichnet wird.

Der Eintrittstag des einzelnen Versicherten in die V., mit dem für ihn alljährlich ein neues V'sjahr beginnt, fällt gewöhnlich nicht mit dem Geschäftsjahre, das am Tage nach der Bilanz seinen Anfang nimmt, zusammen. Daher müssen wir das Deckungskapital unter der Voraussetzung, daß der Versicherte $m + \frac{m_1}{m_2}$ Jahre versichert ist, behandeln; $\frac{m_1}{m_2}$ ist dabei ein echter, positiver Bruch, m eine ganze positive Zahl. Am Ende des $m$ten V'sjahres ist für die Einheit der versicherten Summe das Deckungskapital ${}_mV_x$; am Anfang des $m+1$ten V'sjahres soll die jährliche Bruttoprämie, deren Nettoprämie P_x ist, bezahlt werden; hierdurch wächst das Deckungskapital auf ${}_mV_x + P_x$. Am Schlusse des $m+1$ten V'sjahres ist das Deckungskapital ${}_{m+1}V_x$; es hat sich mithin im Laufe des Jahres von dem Zeitpunkt unmittelbar nach der Prämienzahlung bis zum Schluß des Jahres um: ${}_{m+1}V_x - ({}_mV_x + P_x)$ verändert. Nimmt man im Verlaufe eines Jahres die Änderung

proportional der verflossenen Zeit an, so beträgt sie für $\frac{m_1}{m_2}$ Teile des Jahres:

$$\frac{m_1}{m_2}\left({}_{m+1}V_x - {}_mV_x - P_x\right).$$

Fügt man hierzu ${}_mV_x + P_x$, so hat man das Deckungskapital für die Einheit der versicherten Summe $m + \frac{m_1}{m_2}$ Jahre nach dem Beginn der V.; dieses Deckungskapital soll mit ${}_{m+\frac{m_1}{m_2}}V_x$ bezeichnet werden. Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} {}_{m+\frac{m_1}{m_2}}V_x &= {}_mV_x + P_x + \frac{m_1}{m_2}\left({}_{m+1}V_x - {}_mV_x - P_x\right) \\ &= \left[\frac{m_1}{m_2} \cdot {}_{m+1}V_x + \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) \cdot {}_mV_x\right] + P_x\left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right). \end{aligned} \tag{133}$$

Eigentlich müßte man für jede V. am Tage der Bilanz ihre Dauer $m + \frac{m_1}{m_2}$ bestimmen, ${}_{m+\frac{m_1}{m_2}}V_x$ berechnen und mit der Höhe des versicherten Kapitals multiplizieren, um das Deckungskapital für jede einzelne V. und hieraus das Gesamtdeckungskapital zu finden. Der Kürze halber betrachtet man einen jeden Versicherten, der zwischen m und $m+1$ Jahre versichert ist, als durchschnittlich $m + \frac{1}{2}$ Jahre versichert und bildet ${}_{m+\frac{1}{2}}V_x$.

Aus (133) folgt:

$${}_{m+\frac{1}{2}}V_x = \frac{{}_{m+1}V_x + {}_mV_x}{2} + \frac{P_x}{2}. \tag{134}$$

Das Deckungskapital der einzelnen V. erscheint als das arithmetische Mittel aus dem Deckungskapital des

laufenden und des vergangenen V'sjahres, vermehrt um die halbe Nettoprämie. Manche V'sanstalten führen in ihren Passiven nur den Teil des Deckungskapitals, der dem Summanden $\frac{{}_{m+1}V_x + {}_mV_x}{2}$ in (134) entspricht, als Deckungskapital; der Teil des Deckungskapitals, der dem $\frac{P_x}{2}$ entspricht, wird dann als unverdiente oder vorausbezahlte Prämie, welche eigentlich erst dem nächsten Rechnungsjahre zufällt, bezeichnet und in der Bilanz unter den Passiven als besonderer Posten „Prämienüberträge" geführt[1]). Die meisten V'sinstitute welche in ihrer Bilanz gesondert Prämienüberträge buchen, berechnen diese aus der Brutto-, statt aus der Nettoprämie. Die Prämienüberträge enthalten dann auch Kosten, welche für die Regie zu verwenden sind. Anstalten, welche zillmern, bedienen sich bei der Berechnung des Deckungskapitals des Zillmerschen Dekkungskapitals und haben nicht die Nettoprämie, sondern mindestens die Reserveprämie (S. 134) für die Prämienüberträge zu verwenden.

Zu den Passiven einer V'sanstalt gehört auch die sogenannte Schadenreserve oder Reserve für schwebende V'sfälle. In diese sind alle am Tage der Bilanz bereits fällig gewordenen versicherten Summen, welche die Gesellschaft aus irgendwelchen Gründen noch nicht auszahlte, aufzunehmen. Bei V'en mit festem Auszahlungstermin, die zur Zeit der Bilanz prämienfrei sind (vgl. S. 90), sind die Barwerte der versicherten Summen am Tage der Bilanz in die Schadenreserve einzustellen.

[1]) Vgl. hierzu Veröffentlichungen des Kais. Aufsichtsamts f. Privatv., Jahrg. 1905, S. 77.

Einen wichtigen Passivposten bildet auch die Gewinnreserve der mit Gewinnanteil Versicherten. Der Teil des Jahresüberschusses, der an die Versicherten als Dividende zur Auszahlung gelangen soll, kommt dem einzelnen Versicherten zumeist nicht sofort zugute, sondern verbleibt gewöhnlich zuerst 1—5 Jahre im Besitz der Anstalt. Diese Maßregel will einen Sicherheitsfonds schaffen, der satzungsgemäß zu außerordentlichen Verlusten herangezogen werden kann; er ermöglicht auch während einer Reihe von Jahren eine gleichmäßigere Verteilung der Dividende.

Werden von einer V'sanstalt für besonderes Risiko (schwächliche Personen, gefährdete Berufe usw.) Extrazuschläge zur Prämie erhoben, so müssen diese einer Risikoreserve zugeführt werden. Diese ist ebenso wie die S. 138 besprochene Unkostenreserve unter den Passiven zu führen. Zu den Passiven gehören ferner alle Arten von Extrafonds, die nicht als Eigentum der V'sanstalt anzusehen sind, noch nicht abgehobene Gewinnanteile der Versicherten, Guthaben dritter Personen, sowie im voraus erhaltene, noch nicht fällige Prämien.

Den Passiven gegenüber stehen die den Besitz der V'sanstalt bildenden Aktiva, die in Wertpapieren, barer Kasse, Außenständen usw. bestehen. Hervorzuheben unter den Außenständen sind die Darlehen auf Policen, sowie die gestundeten Prämien. Wir nahmen bei der Prämienzahlung und der Berechnung des Deckungskapitals immer an, daß bei Beginn des neuen V'sjahres die ganze Jahresprämie fällig ist. Aus dieser Anschauung ergibt sich, daß bei ratenweiser Prämienzahlung im Laufe eines Jahres die am Tage der Bilanz noch nicht gezahlten Prämienteile als geliehen oder gestundet anzusehen sind. Am korrektesten handelt eine Anstalt,

diese gestundeten Prämien nur mit ihrem Nettowerte als Aktiva in die Bilanz einzustellen, denn jedenfalls kosten die Prämien Einkassierungslohn. Zu dem Posten „gestundete Prämien“ gehören auch bereits am Tage der Bilanz fällige Prämien, für welche Zahlungsfrist gewährt wurde[1]).

§ 2. Gewinn.

Aus der Aufstellung der Aktiva und Passiva ergibt sich der Überschuß oder Gewinn, den das Institut im Kalenderjahre erzielte; er ist unter den Passiven mitzuführen. Er fließt aus günstigerer Sterblichkeit unter den Versicherten und höherer Verzinsung des Geldes, als das Grundschema annimmt, den Zuschlägen zur Nettoprämie, dem Rückkaufe und der Beleihung von Policen, sowie etwaigen anderen Gewinn abwerfenden Geschäften. Bezüglich des Sterblichkeitsgewinnes ist zu bemerken, daß bei einer V'sanstalt trotz günstigerer Sterblichkeit als derjenigen der zugrunde gelegten Sterblichkeitstafel frühzeitiges Ableben eines außergewöhnlich hoch auf den Todesfall Versicherten oder sehr lange Lebensdauer eines übernormal versicherten Leibrentners den Sterblichkeitsgewinn nicht nur absorbieren, sondern sogar in Verlust verwandeln kann. Um dieser Gefahr zu entgehen, rückversichert die Anstalt von den großen V'ssummen den ihr für ihren Betrieb zu hoch und riskant erscheinenden Betrag bei einer anderen V. Die mathematische Theorie der oberen Grenze der V'ssumme, welche für eine V'sanstalt ent-

---

[1]) Vgl. als Muster einer Bilanz diejenige in den Vorschriften des Kais. Aufsichtsamts f. Privatv.. Veröffentlichungen des Kais. Aufsichtsamtes f. Privatv., Jahrg. 1902, S. 38.

sprechend ihrem Geschäftsumfange zulässig ist, hat noch nicht ihren Abschluß erreicht[1]).

Der erzielte Gewinn wird nach den Statuten der V'sanstalt und den Landesgesetzen verwandt. Durch einen bestimmten Prozentsatz desselben werden die Sicherheitsreserven alljährlich vergrößert, ein kleiner Prozentsatz gelangt meistens an die Beamten der Anstalt als Tantieme zur Verteilung, der übrigbleibende Teil kommt bei V'sanstalten auf Gegenseitigkeit den Versicherten, bei Aktiengesellschaften den Aktionären zugute; doch ist es bei den deutschen Aktiengesellschaften zumeist üblich, die Verträge derartig abzuschließen, daß auch die Versicherten einen gewissen Anteil am Jahresgewinn haben. Die Aktionäre erhalten ihren Gewinnanteil entsprechend der Höhe des in ihrem Besitze befindlichen Aktienkapitals. Der für die Versicherten ausgeschiedene Gewinn fließt zumeist zunächst in die Gewinnreserve der Versicherten und gelangt erst nach 1 bis 5 Jahren in den Besitz des einzelnen Versicherten. Die Gewinnverteilung auf die einzelnen Policen geschieht auf sehr verschiedene Arten; im Deutschen Reiche findet sie gewöhnlich nach Verhältnis der einzelnen Jahresprämie, nach Verhältnis der Gesamtsumme der seit dem Beginn der V. gezahlten Jahresprämien oder nach Verhältnis des Deckungskapitals statt. Die Gothaer Lebensv'sbank hat ein sog. gemischtes System der

[1]) Vgl. Landré, Aperçu succinct des théories du plein de l'assurance: Transact. of the sec. internat. actuarial congress, London 1899, S. 110. P. Radtke, Die Stabilität der Lebensv'sanstalten, Zeitschr. f. d. ges. V'swissenschaft Bd. 3, 399—459 (1903). Die Frage gehört in die Theorie des Risikos einer Lebensv. Diese beschäftigt sich allgemein mit der Aufgabe, den Einfluß nicht rechnungsmäßigen Verlaufs der versicherten Ereignisse infolge zufälliger Sterblichkeitsschwankungen zu bestimmen. Vgl. den Aufsatz von Bohlmann: Die Theorie des mittleren Risikos in der Lebensv.. Sechster internationaler Kongreß f. V'swissenschaft, Bd. 1, S. 593 (1909). (Der Freundlichkeit des Verfassers verdanke ich einen Separatabzug. Die Kongreßberichte selbst sind zurzeit noch nicht erschienen.)

Gewinnverteilung. Ein Teil des Gewinnes wird nach dem Verhältnis der einzelnen Jahresprämie, ein Teil nach dem Verhältnis des Deckungskapitals verteilt. In Amerika ist die Gewinnverteilung nach dem Kontributionssystem gebräuchlich; dieses sucht bei der Verteilung des Gewinnes auf die einzelnen Policen den drei Hauptgewinnquellen: Sterblichkeitsgewinn, Zinsgewinn und Zuschlagsgewinn (vgl. S. 146) möglichst Rechnung zu tragen und die einzelne Police möglichst mit dem Anteil, den sie zu dem erzielten Jahresüberschuß beigetragen hat, an dem Gewinn zu beteiligen. Im Deutschen Reiche findet dieses System bei der Leipziger Lebensv'sgesellschaft Verwendung.

Die Dividende wird entweder dem Versicherten bar ausgezahlt oder auf seine künftige fällige Prämie angerechnet oder einem zinstragenden Konto des Versicherten gutgeschrieben (die Anstalt dient für den Versicherten als Sparkasse) oder der Versicherte kann seine Gewinnanteile zum Abschluß einer neuen oder zur Erhöhung seiner ursprünglichen V. verwenden[1]). (Diese letztere Einrichtung wird als Bonus bezeichnet, vgl. S. 71.)

VIII. Kapitel.

Versicherung auf verbundene Leben.

Unter einer V. auf verbundene Leben versteht man eine V., welche von der Lebensdauer mehrerer Personen abhängt. In der Praxis sind diejenigen V'en, welche durch Leben und Sterben zweier Personen bedingt sind

[1]) Vgl. die Publikation des Kais. Aufsichtsamts f. Privatv.: Die Gewinnbeteiligung der Versicherten bei den im Deutschen Reiche arbeitenden Lebensv'sgesellschaften. Heft 10 der Veröffentlichungen des Deutschen Vereins f. V'swissenschaft (1906). Siehe auch des Verfassers Artikel: Gewinn in Manes' V'slexikon.

(Witwenrente, Waisenpension), die wichtigsten. Wir beschränken uns daher auf deren Behandlung. Der bequemeren Ausdrucksweise wegen nehmen wir an, daß es sich um V'en handelt, die ein Ehepaar betreffen, dessen Ehemann $x$jährig, dessen Ehefrau $y$jährig ist. Anstatt eines Ehepaares kann man aber auch ebensogut einen $x$jährigen Vater und seinen $y$jährigen Sohn, einen $x$jährigen Bruder und dessen $y$jährige Schwester oder irgendein anderes Personenpaar, wovon das eine Individuum $x$jährig, das andere $y$jährig ist, bei den zu behandelnden Fragen als vorliegend betrachten.

Für die Prämienbestimmung ist eine Absterbeordnung nötig, welche angibt, wie viele Ehepaare aus einer großen Grundmasse von Ehepaaren, bei denen der Ehemann ein bestimmtes Lebensalter und die Ehefrau ein bestimmtes Lebensalter haben, noch nach einem, zwei usw. Jahren verbunden leben. Eine solche Absterbeordnung hat eine Reihe von Zahlen:

$$l_{xy}\,,\ l_{x+1\,y+1}\,,\ l_{x+2\,y+2}\,,\ \ldots \tag{135}$$

zu notieren, welche die Anzahl der überlebenden Ehepaare angeben, die aus der Grundmasse von l_{xy} Ehepaaren mit $x$jährigen Ehemännern und $y$jährigen Ehefrauen (x und y ganze positive Zahlen) hervorgehen und deren Ehen noch nach 1, 2, ... Jahren nicht durch den Tod gelöst sind. Die Altersdifferenz zwischen dem $x$jährigen Mann und der $y$jährigen Frau kann sehr verschieden sein. Man hätte für jede mögliche Altersdifferenz eine auf Beobachtung beruhende Absterbeordnung herzustellen, was sehr mühsam ist und daher in der Praxis nie durchgeführt wurde. Infolgedessen greift man zu einer Hypothese. l_x, l_{x+1}, l_{x+2}, ... seien die einer Männersterbetafel entnommenen Werte der

Lebenden des Alters $x, x+1, x+2, \ldots; l'_y, l'_{y+1}, l'_{y+2}, \ldots$ seien die einer Frauensterbetafel entnommenen Werte der Lebenden des Alters y, $y+1$, $y+2, \ldots$ Aus den l_x Männern des Alters x und den l'_y Frauen des Alters y lassen sich $l_x \cdot l'_y$ Paare kombinieren, wenn man jeden $x$jährigen Mann mit jeder $y$jährigen Frau einmal zusammenbringt. In analoger Weise lassen sich aus den l_{x+1} Männern des Alters $x+1$ und den l'_{y+1} Frauen des Alters $y+1 : l_{x+1} \cdot l'_{y+1}$ Paare mit $x+1$-jährigen Männern und $y+1$jährigen Frauen bilden; diese Anzahl von $l_{x+1} \cdot l'_{y+1}$ Paaren ist nach einem Jahre aus den $l_x \cdot l'_y$ Paaren geworden. Man setzt daher:

$$l_{xy} = l_x \cdot l'_y, \quad l_{x+1\,y+1} = l_{x+1} \cdot l'_{y+1},$$
$$l_{x+2\,y+2} = l_{x+2} \cdot l'_{y+2}, \ldots \tag{136}$$

Die durch (136) gebildete Absterbeordnung entspricht sicher nicht der Wirklichkeit; sie gilt ebenso wie für Ehepaare auch z. B. für ledige Geschwisterpaare, Bruder und Schwester, sie berücksichtigt also nicht den Einfluß der Ehe auf die Sterblichkeit. Für Personen desselben Geschlechtes, die unter gleichen Bedingungen leben, setzt man $l_{xy} = l_x \cdot l_y$ und entnimmt l_x und l_y derselben Sterblichkeitstafel.

Von V'en auf verbundene Leben behandeln wir zunächst die Postnumerandoverbindungsrente bis zum ersten Tode. Ein Ehepaar, dessen Ehemann $x$jährig und dessen Ehefrau $y$jährig ist, erkauft eine ein Jahr nach Abschluß des Vertrages beginnende, alljährlich in der gleichen Höhe 1 bis zur Lösung der Ehe durch den Tod eines der Gatten zahlbare Leibrente
(XXXVIII) durch Zahlen der einmaligen Nettoprämie a_{xy} (XXXVIII):

$$a_{xy} = \frac{l_{x+1\,y+1}\,v + l_{x+2\,y+2}\,v^2 + \ldots}{l_{xy}}. \tag{137}$$

Diese Formel wird genau ebenso wie Formel (13) hergeleitet, indem man von einer fingierten Gesellschaft von l_{xy} Ehepaaren ausgeht.

Benützt man (136), so erhält man:

$$a_{xy} = \frac{l_{x+1} \cdot l'_{y+1}\, v + l_{x+2} \cdot l'_{y+2}\, v^2 + \ldots}{l_x \cdot l'_y}. \quad (138)$$

Die Pränumerandoverbindungsrente bis zum ersten Tode, bei welcher die V'sanstalt auch bei Abschluß des Vertrages die Summe 1 zahlen muß, wird durch die einmalige Nettoprämie $\mathbf{a}_{xy}$ (XXXIX) er- (XXXIX)
worben, wobei $\mathbf{a}_{xy} = a_{xy} + 1$; (139)
vgl. die analoge Formel (19). Auf die verschiedenen Umformungen, welche man a_{xy} und $\mathbf{a}_{xy}$ ebenso wie a_x und $\mathbf{a}_x$ zuteil werden lassen kann, gehen wir des beschränkten Raumes wegen nicht ein.

Versichert sich ein Ehepaar, dessen Ehemann $x$jährig und dessen Ehefrau $y$jährig ist, auf eine sofort bei Abschluß des Vertrages beginnende, nur solange beide Ehegatten leben, jedoch höchstens $n$mal, alljährlich in der gleichen Höhe 1 zahlbare Verbindungsrente, so wird die einmalige Nettoprämie dieser $n$jährigen, kurzen oder temporären Pränumerandoverbindungsrente analog zu (XV) mit $|_n\mathbf{a}_{xy}$ (XL) bezeichnet. (XL)
In Analogie mit (25) findet man:

$$|_n\mathbf{a}_{xy} = \frac{l_{xy} + l_{x+1\,y+1}\, v + l_{x+2\,y+2}\, v^2 + \ldots + l_{x+n-1\,y+n-1}\, v^{n-1}}{l_{xy}} \quad (140)$$

oder unter Benützung von (136) die Formel:

$$|_n\mathbf{a}_{xy} = \frac{l_x \cdot l'_y + l_{x+1} l'_{y+1}\, v + l_{x+2} l'_{y+2}\, v^2 + \ldots + l_{x+n-1} l'_{y+n-1}\, v^{n-1}}{l_x \cdot l'_y}. \quad (141)$$

Die Formel (141) setzt ebenso wie die Formel (138) nur Sterbetafeln für einzelne Individuen, nicht für Paare voraus.

Sehr häufig wird in der Praxis eine einseitige Überlebensrentenv. abgeschlossen; es handelt sich hier um eine Leibrente, die für eine im voraus bestimmte Person eines Paares nach dem Tode der anderen Person des Paares beginnt.

(A) Ein $x$jähriger Mann versichert für seine $y$jährige Frau eine jährlich zahlbare Witwenpension in der Höhe 1, die am Anfange des dem Sterbejahre des Mannes folgenden V'sjahres beginnt, falls die Frau zu diesem Zeitpunkt noch lebt. Die einmalige Nettoprämie dieser
(XLI) V. wird mit $a_{x|y}$ (XLI) bezeichnet. Würde die Leibrente für die $y$jährige Frau sofort beginnen, so würde die einmalige Nettoprämie $\mathfrak{a}_y$ sein; die Rente wird aber nicht gezahlt, solange beide Personen leben, daher ist $\mathfrak{a}_y$ um die einmalige Nettoprämie $\mathfrak{a}_{xy}$ der Pränumerandoverbindungsrente bis zum ersten Tode zu kürzen:

$$a_{x|y} = \mathfrak{a}_y - \mathfrak{a}_{xy} \,. \qquad (142)$$

(B) Ein $x$jähriger Vater versichert für seinen $y$jährigen Sohn eine jährlich zahlbare Waisenpension in der Höhe 1, die am Anfange des dem Sterbejahre des Vaters folgenden V'sjahres beginnt, falls der Sohn zu diesem Zeitpunkte noch lebt und das letztemal dem Sohne bei Erleben seines $y + n$ten Geburtstages ausgezahlt wird. Die einmalige Nettoprämie wird gefunden gleich:

$$_{|n+1}\mathfrak{a}_y - {}_{|n+1}\mathfrak{a}_{xy} \,; \qquad (143)$$

denn würde die Rente für den Sohn sofort beginnen, so hätte man eine $n + 1$jährige, kurze Pränumerandoleibrente für eine $y$jährige Person, diese ist aber, da die Zahlungen bei Lebzeiten des Vaters fortfallen, um eine $n + 1$jährige, kurze Pränumerandoverbindungsrente zu kürzen.

Um Beispiele für jährliche, gleichbleibende Prämien-

zahlung bei V'en auf verbundene Leben zu geben, nehmen wir an, daß bei der in (A) geschilderten Witwenpension das Ehepaar, mit Abschluß des Vertrages beginnend, alljährlich dieselbe gleiche Prämie zahlen will, (a) solange beide Ehegatten gemeinsam leben, (b) ebenfalls solange beide Ehegatten gemeinsam leben, jedoch im Maximum t mal. Man hat dann Formel (75) zu verwenden. Für das dortige $\mathbf{a}$ ist im Falle (a) $\mathbf{a}_{xy}$, im Falle (b) $|_t\mathbf{a}_{xy}$ zu setzen. Die jährlich gleichbleibende Nettoprämie ist im Falle (A_a): $\frac{a_{x|y}}{\mathbf{a}_{xy}} = \frac{\mathbf{a}_y}{\mathbf{a}_{xy}} - 1$, im Falle ($A_b$): $\frac{a_{x|y}}{|_t\mathbf{a}_{xy}}$; denn $a_{x|y}$ ist die einmalige Nettoprämie der V..

Soll für die in (B) geschilderte Waisenpension, mit Abschluß des Vertrages beginnend, alljährlich dieselbe gleiche Prämie, solange Vater und Sohn gemeinsam leben, jedoch im Maximum t mal, bezahlt werden, so wird die jährliche Nettoprämie, wie sich aus (75) ergibt, indem man dort $|_t\mathbf{a}_{xy}$ für $\mathbf{a}$ setzt und den Wert der einmaligen Nettoprämie der Formel (143) entnimmt,

$$\frac{|_{n+1}\mathbf{a}_y - |_{n+1}\mathbf{a}_{xy}}{|_t\mathbf{a}_{xy}}. \tag{144}$$

Für die Berechnung des Deckungskapitals sind die Formeln (114) und (116) zu verwenden. Das Deckungskapital für die Einheit ist m Jahre nach Abschluß des Vertrages nach (114):

$$\text{für } (A_a):\ a_{x+m|y+m} - \frac{a_{x|y}}{\mathbf{a}_{xy}} \cdot \mathbf{a}_{x+m\ y+m}; \tag{145}$$

$$\text{für } (A_b):\ a_{x+m|y+m} - \frac{a_{xy}}{|_t\mathbf{a}_{xy}} \cdot |_{t-m}\mathbf{a}_{x+m\ y+m}; \tag{146}$$

für (B): $\left({}_{|n-m+1}\mathbf{a}_{y+m} - {}_{|n-m+1}\mathbf{a}_{x+m\,y+m}\right)$

$$- \left[\frac{{}_{|n+1}\mathbf{a}_y - {}_{|n+1}\mathbf{a}_{xy}}{{}_{|t}\mathbf{a}_{xy}}\right] \cdot {}_{|t-m}\mathbf{a}_{x+m\,y+m}\,. \qquad (147)$$

Wir entwickeln noch die letzte Formel aus (114): m Jahre nach Abschluß des Vertrages ist der Vater $x+m$-, der Sohn $y+m$jährig. Für die einmalige Prämie $\mathrm{A}_{(m)}$ ist daher nach (143)

$${}_{|n-m+1}\mathbf{a}_{y+m} - {}_{|n-m+1}\mathbf{a}_{x+m\,y+m}$$

zu setzen; die jährliche Prämie wird durch (144) gegeben. $\mathbf{a}_{(m)}$ wird die $t-m$jährige, kurze Pränumerandoverbindungsrente eines $x+m$jährigen Vaters und seines $y+m$jährigen Sohnes.

Wir haben für die Berechnung des Deckungskapitals bei den Formeln (145)—(147) angenommen, daß zur Zeit der Bestimmung des Deckungskapitals die beiden an der V. beteiligten Personen noch gemeinsam leben. Für die Formeln (146) und (147) setzen wir auch noch $m < t$ voraus.

Ist im Falle (A) der Mann des Ehepaares zur Zeit der Bestimmung des Deckungskapitals bereits verstorben, so ist das Deckungskapital für die Einheit der versicherten Summe m Jahre nach Abschluß des Vertrages gleich a_{y+m}; hierbei ist die am Anfange des $m+1$ten V'sjahres fällige Rente 1 bereits am Schlusse des $m$ten V'sjahres an die Witwe, von deren Leben allein jetzt die V. abhängt, zur Auszahlung gelangt angenommen (vgl. S. 120).

Ist im Falle (B) der Vater bereits verstorben, so ist m Jahre nach Abschluß des V'svertrages das Deckungskapital für die Einheit der versicherten Summe gleich ${}_{|n-m}a_{y+m}$; dabei ist angenommen, daß die Waise die an ihrem $y+m$ten Geburtstage fällige Leibrente 1

bereits am Tage der Bestimmung des Deckungskapitals ausgezahlt erhalten hat.

Ist $m \geqq t$ und leben im Falle (A_b) und (B) noch beide Versicherte gemeinsam, so wird das Deckungskapital nach der S. 119 entwickelten Regel gefunden; es wird für (A_b) gleich $a_{x+m|y+m}$, für (B) gleich

$$_{|n-m+1}\mathfrak{a}_{y+m} - {}_{|n-m+1}\mathfrak{a}_{x+m\,y+m}\,.$$

Kapitalv'en auf den Todesfall für verbundene Leben (Überlebensv'en, V'en auf das längste zweier Leben) werden in der Praxis selten abgeschlossen.

IX. Kapitel.

Selektionssterbetafeln.

§ 1. Wesen und Konstruktion der Selektionssterbetafeln.

Wenn auch die Sterblichkeit vom Lebensalter abhängt, so stellen gleichaltrige Versicherte für V'sanstalten doch nicht gleichwertige Risiken dar; ihre Sterblichkeit wird vielmehr auch wesentlich durch die Länge der V'sdauer bedingt. Bei der normalen Todesfallv. ist dies eine Folge der ärztlichen Auswahl, bei der Leibrentenv. der Selbstselektion der V'slustigen[1]). Nach den Erfahrungen der Gothaer Lebensv'sbank starben von ihren 35jährigen auf den Todesfall Versicherten durchschnittlich 5,80 pro Mille im Laufe ihres nächsten Lebensjahres. Das Bild ändert sich aber wesentlich, wenn man die Versicherten nicht nur nach

---

[1]) Der Hinweis auf den Einfluß der Selektion findet sich schon im Jahre 1834 bei dem Engländer de Morgan (vgl. Roghé, Zitat auf S. 41, S. 40). Die Bedeutung der Selektion hat dann vor allem T. B. Sprague nachgewiesen und aus dem Material der Tafeln der zwanzig englischen Gesellschaften eine Selektionstafel konstruiert, bei der $H^{M(5)}$ als Schlußtafel erscheint. (Select life tables. London 1896.)

dem Alter, sondern auch nach der V'sdauer trennt. Von 35jährigen Personen, die in ihrem ersten V'sjahre stehen, starben durchschnittlich 3,69 ‰, von denen im zweiten 4,77 ‰, von denen im dritten 5,34 ‰, von denen im vierten 5,75 ‰. Erst 35jährige, bei denen seit dem Eintritt in die V., also seit der ärztlichen Untersuchung, vier und mehr Jahre verflossen waren, wiesen eine höhere Sterblichkeit auf, als sie die aus der Beobachtung sämtlicher Versicherter ohne Berücksichtigung der V'sdauer gewonnene Zahl 5,80 ‰ verzeichnet. Für 35jährige Versicherte, die im fünften V'sjahre stehen, ergibt sich 5,99 ‰, für solche im sechsten 6,15 ‰, für solche im siebenten 6,35 ‰. Nach siebenjähriger Selektionsperiode zeigen die Erfahrungen der Gothaer keinen durch die V'sdauer bedingten Unterschied in der Sterblichkeit gleichaltriger Versicherter; daher werden Versicherte, die bei ihr mehr als 7 Jahre versichert waren, nicht mehr nach der V'sdauer getrennt untersucht. Von 35jährigen Versicherten, die bei der Gothaer sieben und mehr Jahre versichert waren, starben durchschnittlich 6,46 ‰ im Laufe ihres nächsten Lebensjahres.

Für die niedrigere Sterblichkeit der Rentenversicherten in den ersten V'sjahren seien beispielsweise folgende Werte aus der durch Beobachtung weiblicher Rentenversicherter hergeleiteten sog. Tafel $O^{[af]}$ der 43 britischen Gesellschaften (vgl. S. 16) angegeben[1]; die Tafel hat eine fünfjährige Selektionsperiode. Von 50jährigen Frauen, die eben eine Leibrente gekauft hatten, starben 6,11 ‰ im Laufe ihres nächsten Lebensjahres, von solchen 50jährigen, die ihre V. bereits vor einem Jahre abgeschlossen hatten, 9,03 ‰, von solchen des dritten V'sjahres 11,70 ‰, von solchen des vierten 13,77 ‰, von solchen des fünften 14,97 ‰; schließlich starben von 50jährigen Frauen, die fünf und mehr Jahre

[1]) British offices life annuity tables, S. 56.

versichert waren, 15,33 $^0/_{00}$ im Laufe ihres nächsten Lebensjahres.

Sterbetafeln, die dem Lebensalter und der V'sdauer Rechnung tragen, heißen Selektionstafeln, auch Auslesetafeln oder doppelt abgestufte Tafeln. Im Gegensatz zu ihnen heißen Tafeln, die aus der Beobachtung eines Aggregats von Personen, die nur nach gleichem Lebensalter ohne Rücksicht auf die V'sdauer zusammengefaßt werden, Aggregat- oder Durchschnittssterbetafeln, auch summarische Tafeln. Die Tafeln, welche nur die Sterblichkeit solcher Personen verzeichnen, die die Periode der Selektion bereits zurückgelegt haben, heißen, da sie den Schluß der Selektionstafel bilden, Schlüßtafeln (ultimate tables).

Daß die Selektionstafeln ein feineres Sterbemaß als die Aggregattafeln liefern, ist wohl nicht zweifelhaft. Bei einer Aggregattafel hängen ja die Sterbenswahrscheinlichkeiten wesentlich von der Zusammensetzung des Aggregats ab; je nachdem in einer Altersklasse die Alt- oder Neuversicherten überwiegen, fallen die Sterbenswahrscheinlichkeiten größer oder kleiner aus. Bei einer Selektionstafel ist diese Zufälligkeit beseitigt. Die Gegner der Selektionstafeln bekämpfen ihren Wert deswegen, weil die Sterblichkeit auch von dem Mischungsverhältnis der Versicherten nach den einzelnen Berufsgruppen abhängt und sich das Wachsen der Sterblichkeit mit der V'sdauer bei der Zerlegung in verschiedene Berufsgruppen verschieden zeigt. Statt der Selektionstafel erscheint ihnen die Trennung der Versicherten in große Berufsgruppen und Herstellung von Sterbetafeln für diese als Ideal der Lebensv. Diese wird nach ihrer Ansicht in Zukunft einmal zwischen der V. von Ärzten, Landwirten, Forstbeamten, Kauf-

leuten usw. zu unterscheiden haben[1]). In Deutschland haben bisher zwei V'sanstalten, und zwar die Gothaer und die Leipziger Lebensv'sgesellschaft seit 1903 bzw. 1907 aus eigenen Beobachtungen an ihren auf den Todesfall Versicherten hergestellte Selektionstafeln zur Bestimmung ihres Prämientarifs und ihrer Deckungskapitalien (vgl. die Zitate auf S. 41) eingeführt. Von weiteren Selektionstafeln sind für die Todesfallv. die aus den Erfahrungen der 60 britischen Gesellschaften (vor allem die mit $O^{[M]}$ bezeichnete Tafel, vgl. S. 16) und die der österreichischen Versicherten (vgl. S. 19) zu nennen, für die Leibrentenv. die Tafeln der 43 britischen Gesellschaften. Bei der Gothaer ist die Selektionsperiode 7, bei den anderen Tafeln 10 Jahre, ausgenommen die genannten Rentnertafeln, die eine fünfjährige Selektionsperiode haben.

Ist p die Periode der Selektion, also z. B. für die Gothaer $p = 7$, für die oben angeführte Tafel $O^{[af]}$ $p = 5$,
(VII₁) für andere Tafeln $p = 10$, so bedeutet $q_{[x]+z}$ (VII$_1$) die Sterbenswahrscheinlichkeit eines $(x + z)$jährigen, der mit x Jahren versichert wurde, in seinem $(z + 1)$ten V'sjahre; z darf hierbei nur die Werte 0, 1, 2, ..., $p - 1$ annehmen. Die Sterbenswahrscheinlichkeit eines $x$jährigen, der mindestens p Jahre versichert ist, wird mit q_x bezeichnet.

Für die Nomenklatur gilt bei Selektionstafeln folgende allgemeine Bemerkung: Das Alter, in dem die Aufnahme in die V. stattfand, wird in eckigen Klammern geschrieben. Treten im Index außerhalb der eckigen Klammern additive Glieder hinzu, so bezeichnen diese die Zeit, die seit der Auswahl vergangen ist. Der gesamte

[1]) Vgl. etwa Riem, Zeitschr. f. d. ges. V'swissenschaft, Bd. 8, 69 (1908) und die kritischen Bemerkungen von Höckner, ebenda, S. 50, 63 u. 91.

Index bezeichnet daher das gegenwärtige Alter der Person. Für die Schlußtafel verwendet man keine eckigen Klammern.

Für die zu Beginn des § angegebenen Gothaer Werte[1]) ist

$$q_{[35]} = 0{,}00369\,, \quad q_{[34]+1} = 0{,}00477\,, \quad q_{[33]+2} = 0{,}00534\,,$$
$$q_{[32]+3} = 0{,}00575\,, \quad q_{[31]+4} = 0{,}00599\,, \quad q_{[30]+5} = 0{,}00615\,,$$
$$q_{[29]+6} = 0{,}00635\,, \quad q_{35} = 0{,}00646\,.$$

Bei einer Selektionstafel bedeutet $l_{[x]}$ die Anzahl derjenigen Personen, die mit x Jahren in die V. eintraten. Mit $l_{[x]+z}$ wird die Anzahl derjenigen Personen bezeichnet, die von den ursprünglich versicherten $l_{[x]}$ Personen noch den Beginn des $(z+1)$ten V'sjahres erlebten; z nimmt hierbei nur die Werte $1, 2, \ldots, p-1$ an. Die Schlußtafel soll für sich allein betrachtet, eine richtige Absterbeordnung darstellen, d. h., bedeutet l_x die Anzahl der in ihr verzeichneten Personen des Alters x, die p und mehr Jahre versichert waren, so erleben von ihnen l_{x+1} das $(x+1)$te Lebensjahr, von diesen l_{x+2} das $(x+2)$te Lebensjahr usw. Mit den anderen Tafeln soll die Schlußtafel derartig verbunden sein, daß l_x für jeden Wert von x die Anzahl derjenigen $x$jährigen vorstellt, die aus der ursprünglich vorhandenen Zahl $l_{[x-p]}$ Versicherter noch in das $(p+1)$te V'sjahr eingetreten ist.

Zur Erläuterung möge ein Bruchstück aus der umstehenden Gothaer Tafel[2]) angegeben werden.

Diese Tafel ist treppenförmig von links nach rechts zu lesen: Von $l_{[18]} = 103\,761$ soeben versicherten 18jährigen erlebten $l_{[18]+1} = 103297$ den Beginn des zweiten, $l_{[18]+2} = 102758$ den Beginn des dritten, $l_{[18]+3} = 102197$ den Beginn des vierten, $l_{[18]+4} = 101632$ den Beginn des fünften, $l_{[18]+5} = 101074$ den Beginn des sechsten, $l_{[18]+6} = 100530$

[1]) J. Karup, Reform, S. 62*.
[2]) J. Karup, Reform, S. 64*.

Alter	Anzahl der Lebenden							
	Eben eingetreten $l_{[x]}$	2tes V'sjahr	3tes V'sjahr	4tes V'sjahr	5tes V'sjahr	6tes V'sjahr	7tes V'sjahr	8tes V'sjahr
18	103761	103929	104000	104034	—	—	—	—
19	103120	103297	103374	103411	103427	—	—	—
20	102492	102678	102758	102797	102814	102821	—	—
21	101875	102073	102157	102197	102214	102220	102224	—
22	101273	101479	101571	101613	101632	101638	101641	101643
23	100681	100899	100998	101047	101066	101074	101077	101078
24	100097	100328	100438	100493	100519	100527	100530	100531
25	99519	99763	99887	99951	99982	99995	99999	100000
26	98950	99200	99339	99414	99452	99471	99478	99479
27	98390	98644	98791	98876	98924	98948	98960	98962
28	97831	98092	98242	98334	98390	98421	98437	98440

den Beginn des siebenten V'sjahres, $l_{25} = 100000$ Personen traten in das achte V'sjahr, wurden also 25 Jahre alt, $l_{26} = 99479$ unter ihnen wurden 26 Jahre alt, $l_{27} = 98962$ wurden 27 Jahre alt usw.

(VI$_1$) Bildet man die Differenz $d_{[x]} = l_{[x]} - l_{[x]+1}$ (VI$_1$), so stellt $d_{[x]}$ die Zahl derjenigen Personen dar, die von den $l_{[x]}$ Personen im ersten V'sjahre verstarben. Bilden wir ebenso für alle ganzzahligen Werte des z von 1 bis $p - 2$ die Differenz

(VI$_1$) $$d_{[x]+z} = l_{[x]+z} - l_{[x]+z+1}, \qquad \text{(VI}_1\text{)}$$

so ist $d_{[x]+z}$ die Zahl derjenigen Personen, die von der ursprünglich versicherten Grundmasse $l_{[x]}$ versicherter $x$jähriger im $(z+1)$ten V'sjahre verstarben. Für das letzte, nämlich das $p$te Jahr der Selektionsperiode, beträgt die Zahl der Verstorbenen aus unserer Grund-

(VI$_1$) masse $l_{[x]}$: $\quad d_{[x]+p-1} = l_{[x]+p-1} - l_{x+p}$. (VI$_1$)

Die Zahl der im Alter von x bis $x+1$ Jahren Verstorbenen, die p und mehr Jahre versichert waren, wird gegeben durch $d_x = l_x - l_{x+1}$; diese d_x Personen sind

Verstorbene, die aus einer Grundmasse von $l_{[x-p]}$ im Alter von $x - p$ Jahren in die V. eingetretener Individuen stammen.

Nach den Gothaer Erfahrungen wird, wie man aus der Tabelle berechnet, $d_{[18]} = 464$, $d_{[18]+1} = 539$, $d_{[18]+2} = 561$, $d_{[18]+3} = 565$, $d_{[18]+4} = 558$; $d_{[18]+5} = 544$, $d_{[18]+6} = 530$, $d_{25} = 521$, $d_{26} = 517$.

Die Sterbenswahrscheinlichkeiten drücken sich bei einer Selektionstafel durch die Lebenden und die aus ihnen hervorgehenden Verstorbenen mittels der Gleichungen (VII$_1$) aus: $q_{[x]} = \frac{d_{[x]}}{l_{[x]}}$, $q_{[x]+z} = \frac{d_{[x]+z}}{l_{[x]+z}}$ für (VII$_1$) $z = 1, 2, \ldots, p - 1$ und $q_x = \frac{d_x}{l_x}$ für $x$jährige, die p und mehr Jahre versichert waren. Das Gleichungssystem (VII$_1$) tritt an die Stelle der Relation (VII) auf S. 27.

Nach der zweiten Gleichung des Systems (VI$_1$) ist: $d_{[x]+p-1} = l_{[x]+p-1} - l_{x+p}$; mithin ergibt sich aus dem System (VII$_1$), wenn man $z = p - 1$ setzt:

$$q_{[x]+p-1} = \frac{l_{[x]+p-1} - l_{x+p}}{l_{[x]+p-1}}$$

oder

$$l_{[x]+p-1} = \frac{l_{x+p}}{1 - q_{[x]+p-1}}.$$

Da für $z = 0, 1, 2, \ldots, p - 2$ die Relation (VI$_1$), nämlich $d_{[x]+z} = l_{[x]+z} - l_{[x]+z+1}$ gilt, so folgt aus (VII$_1$), daß

$$q_{[x]+z} = \frac{l_{[x]+z} - l_{[x]+z+1}}{l_{[x]+z}}$$

oder

$$l_{[x]+z} = \frac{l_{[x]+z+1}}{1 - q_{[x]+z}}$$

für $z = 0, 1, 2, \ldots, p - 2$ wird.

Mit Hilfe der eben abgeleiteten Gleichungen kann man eine Selektionstafel konstruieren: Man bestimmt zuerst aus den Aufzeichnungen einer großen V'sanstalt für alle ganzzahligen x die Sterbenswahrscheinlichkeiten: $q_{[x]}$, $q_{[x]+1}$, ..., $q_{[x]+p-1}$, q_x. Dies kann mit Hilfe der Formeln (9') oder (9'') auf S. 41 bezw. 42 geschehen; nur muß man die zu beobachtenden Individuen sowohl nach dem Alter als nach der V'sdauer trennen. Um z. B. nach Formel (9'') die Sterbenswahrscheinlichkeiten $q_{[x]+z}$ der Versicherten zu finden, die den Beginn ihres $(z+1)$ten V'sjahres erlebten, tabuliert man alle Versicherten, die bei der Anstalt zum statutarisch bestimmten Alter x eintraten und z volle Jahre versichert waren. Von der so gefundenen Gesamtheit zählt man alle diejenigen $A_{[x]+z}$ Individuen ab, die das ganze $(z+1)$te V'sjahr als Versicherte durchlebten oder in ihm versichert starben — die Zahl der letzteren sei $m_{[x]+z}$ — oder ihr V'sverhältnis lösten, nachdem sie in ihrem $(z+1)$ten V'sjahre mindestens ein halbes Jahr versichert waren. Dann ist $q_{[x]+z} = \frac{m_{[x]+z}}{A_{[x]+z}}$. Die Zahl z soll natürlich nur die Werte 0, 1, 2, ..., $p-1$ durchlaufen. Zur Bestimmung von q_x sind alle Versicherten während ihres x bis $(x+1)$ten Lebensjahres zu beobachten, die bereits p und mehr Jahre versichert waren.

Hat man die Sterbenswahrscheinlichkeiten gefunden, so leitet man an erster Stelle die Absterbeordnung der Schlußtafel her. Dies geschieht genau ebenso wie bei einer Aggregattafel (vgl. S. 32). Da sich die Schlußtafel auf Personen, die p und mehr Jahre im V'sverhältnis standen, bezieht, so wird man von einer fingierten Grundmasse von $p$jährigen oder älteren Personen ausgehen. Bei der Gothaer wählte Professor J. Karup 100000

Personen des Alters 25 als solche Grundmasse. Von diesen $l_{25} = 100\,000$ Personen erleben $l_{26} = 100\,000\ (1 - q_{25})$ den Beginn ihres 27. Lebensjahres, $l_{27} = l_{26}\,(1 - q_{26})$ den Beginn ihres 28. Lebensjahres usw.

Aus der nunmehr bekannten Absterbeordnung der Schlußtafel und den Sterbenswahrscheinlichkeiten $q_{[x]+p-1}$ kann man mittels der Gleichung: $l_{[x]+p-1} = \frac{l_{x+p}}{1 - q_{[x]+p-1}}$ die der Schlußtafel unmittelbar voraufgehende Rubrik finden, also bei der Gothaer die Lebenden $l_{[x]+6}$ des 7. V'sjahres. Die Relation $l_{[x]+p-2} = \frac{l_{[x]+p-1}}{1 - q_{[x]+p-2}}$ bestimmt hierauf die Lebenden des $(p - 1)$ten V'sjahres. Auf diese Weise geht es weiter, bis man schließlich aus der Gleichung:

$$l_{[x]} = \frac{l_{[x]+1}}{1 - q_{[x]}}$$

die frisch in das V'sverhältnis Eintretenden findet und die volle Sterbetafel hat.

§ 2. Die Berechnung der Prämien und Deckungskapitalien mittels Selektionssterbetafeln.

Auf Grund einer Selektionstafel gestaltet sich die Prämienbestimmung folgendermaßen: Wir nehmen an, daß eine fingierte Gesellschaft von so viel $x$jährigen Personen $l_{[x]}$, wie sie die Selektionstafel verzeichnet, in das V'sverhältnis eintritt; am Schluß des ersten V'sjahres leben noch $l_{[x]+1}$, nach Ablauf des zweiten $l_{[x]+2}$ Personen, so geht es weiter. Am Ende der $p$jährigen Selektionsperiode leben noch l_{x+p} Personen. Von diesen erleben l_{x+p+1} den $(x + p + 1)$ten Geburtstag, l_{x+p+2} den $(x + p + 2)$ten Geburtstag usw.

Versichert sich die fingierte Gesellschaft von $l_{[x]}$ Personen auf eine postnumerando zahlbare Leibrente in der Höhe 1, so würde die versichernde Anstalt ihren Verpflichtungen nachkommen können, wenn sie bei Abschluß des Vertrages über die Summe:

$$l_{[x]+1}v+l_{[x]+2}v^2+\ldots+l_{[x]+p-1}v^{p-1}+l_{x+p}v^p+\ldots+l_\omega v^{\omega-x}$$

verfügen würde. Bei Verwendung einer Selektionstafel ergibt sich die Nettoprämie, die ein $x$jähriger für eine jährlich in der Höhe 1 fällige, lebenslänglich laufende Postnumerandoleibrente zu zahlen hätte, analog zu Formel (13) auf S. 56 als:

$$a_{[x]}=\frac{l_{[x]+1}v+l_{[x]+2}v^2+\ldots+l_{[x]+p-1}v^{p-1}+l_{x+p}v^p+\ldots+l_\omega v^{\omega-x}}{l_{[x]}}. \quad (13_1)$$

(XI$_1$) Analog zu (XI) auf S. 59 definieren wir (XI$_1$): $D_{[x]+z}=l_{[x]+z}v^{x+z}$ für $z=0, 1, 2, \ldots, p-1$ und für die Schlußtafel $D_x=l_x\cdot v^x$.

Multipliziert man Zähler und Nenner von (13_1) mit v^x, so erhält man analog zu (16) auf S. 59

$$a_{[x]}=\frac{D_{[x]+1}+D_{[x]+2}+\ldots+D_{[x]+p-1}+D_{x+p}+\ldots+D_\omega}{D_{[x]}}. \quad (16_1)$$

(XII$_1$) Wir definieren (XII$_1$):

$$\mathbf{N}_{[x]+z}=D_{[x]+z}+D_{[x]+z+1}+\ldots+D_{[x]+p-1}+D_{x+p}+\ldots+D_\omega$$

für $z=0, 1, 2, \ldots, p-1$ und für die Schlußtafel (vgl. die Anm. auf S. 59):

$$\mathbf{N}_x=D_x+D_{x+1}+\ldots+D_\omega.$$

Dann wird (16_1) in die zu (17) auf S. 59 analoge Formel übergehen:

$$a_{[x]}=\frac{\mathbf{N}_{[x]+1}}{D_{[x]}}. \quad (17_1)$$

Die Nettoprämie, die ein $x$jähriger für eine sofort beginnende alljährlich lebenslänglich in der Höhe 1

zur Auszahlung gelangende Leibrente zu zahlen hat, findet man:

$$\mathbf{a}_{[x]} = \frac{l_{[x]} + l_{[x]+1} v + l_{[x]+2} v^2 + \ldots + l_{[x]+p-1} v^{p-1} + l_{x+p} v^p + \ldots + l_\omega v^{\omega - x}}{l_{[x]}}.$$

Multipliziert man Zähler und Nenner mit v^x und führt nach (XI_1) die D - Symbole ein, so hat man:

$$\mathbf{a}_{[x]} = \frac{D_{[x]} + D_{[x]+1} + D_{[x]+2} + \ldots + D_\omega}{D_{[x]}}$$

$$= 1 + a_{[x]} \qquad (19_1)$$

$$= \frac{\mathbf{N}_{[x]}}{D_{[x]}}. \qquad (20_1)$$

Die Formel (20_1) ist analog wie (20) auf S. 60 gebaut, nur ist, wie die Anmerkung auf S. 59 angibt, für N_x das gleichwertige Symbol $\mathbf{N}_{x+1}$ zu verwenden. Diese Bemerkung gilt auch für die folgenden Formeln, die wir angeben.

Die einmalige Nettoprämie, die ein $x$jähriger für eine kurze $n$jährige Pränumerandoleibrente in der Höhe 1 zu zahlen hat, beträgt:

$$|_n\mathbf{a}_{[x]} = \frac{l_{[x]} + l_{[x]+1} v + l_{[x]+2} v^2 + \ldots + l_{[x]+n-1} v^{n-1}}{l_{[x]}}, \qquad (25_1)$$

$$|_n\mathbf{a}_{[x]} = \frac{D_{[x]} + D_{[x]+1} + D_{[x]+2} + \ldots + D_{[x]+n-1}}{D_{[x]}}, \qquad (26_1)$$

$$|_n\mathbf{a}_{[x]} = \frac{\mathbf{N}_{[x]} - \mathbf{N}_{[x]+n}}{D_{[x]}}. \qquad (27_1)$$

Sollte $n \geqq p$ sein, so ist natürlich bei $\mathbf{N}_{[x]+n}$ und bei allen $D_{[x]+z}$, für die z gleich oder größer als p ist, die eckige Klammer fortzulassen. Die für $|_n\mathbf{a}_{[x]}$ erhaltenen Formeln (25_1)—(27_1) sind analog den Formeln (25)—(27) auf S. 62.

Für die Kapitalv. auf den Erlebensfall ergibt sich die einmalige Nettoprämie des $x$jährigen analog zu (40) als:

$$ {}_nE_{[x]} = \frac{D_{[x]+n}}{D_{[x]}} . \qquad (40_1)$$

Sollte $n \geqq p$ sein, so ist bei $D_{[x]+n}$ die eckige Klammer fortzulassen.

Für die einfache Todesfallv. erhält man in Analogie mit den Gleichungen (41)—(44):

$$A_{[x]} = \frac{d_{[x]}\,v + d_{[x]+1}\,v^2 + \ldots + d_\omega\, v^{\omega - x + 1}}{l_{[x]}} \qquad (41_1)$$

$$= 1 + (v - 1) \cdot (a_{[x]} + 1) \qquad (42_1)$$

$$= 1 + (v - 1) \cdot \mathrm{a}_{[x]} \qquad (42_1')$$

$$= \frac{C_{[x]} + C_{[x]+1} + C_{[x]+2} + \ldots + C_\omega}{D_{[x]}} \qquad (43_1)$$

$$= \frac{M_{[x]}}{D_{[x]}} . \qquad (44_1)$$

(XXI$_1$) Hierbei ist in Analogie zu (XXI):

$$C_{[x]+z} = d_{[x]+z}\, v^{x+z+1} \quad \text{für } z = 0, 1, 2, \ldots, p-1$$

und für die Schlußtafel $C_x = d_x \cdot v^{x+1}$ definiert (XXI$_1$).

Unter $M_{[x]+z}$ ist in Analogie mit (XXII) zu ver-

(XXII$_1$) stehen: $M_{[x]+z} = C_{[x]+z} + C_{[x]+z+1} + \ldots + C_\omega$

für $z = 0, 1, 2, \ldots, p-1$ und für die Schlußtafel

$$M_x = C_x + C_{x+1} + \ldots + C_\omega \quad (\mathrm{XXII}_1).$$

Die einmalige Nettoprämie für eine gemischte V. eines $x$jährigen auf n Jahre ist in Analogie zu (XXIV)

(XXIV$_1$) mit $A_{[x]\overline{n|}}$ (XXIV$_1$) zu bezeichnen. Man erhält analog zu (53) und (55):

$$A_{[x]\overline{n|}} = {}_{|n}A_{[x]} + {}_nE_{[x]} , \qquad (53_1)$$

$$A_{[x]\overline{n|}} = \frac{C_{[x]} + C_{[x]+1} + \ldots + C_{[x]+n-1} + D_{[x]+n}}{D_{[x]}}$$

$$= \frac{M_{[x]} - M_{[x]+n} + D_{[x]+n}}{D_{[x]}} \,. \tag{55$_1$}$$

Ist die Selektionsperiode vorüber, so sind natürlich bei $C_{[x]+z}$, $M_{[x]+n}$ und $D_{[x]+n}$ für $z \geqq p$ und $n \geqq p$ rechter Hand die eckigen Klammern fortzulassen.

Für Todesfallv'en mit unmittelbarer Auszahlung nach dem Tode wird man sich bei Selektionstafeln der Betrachtungen des Kap. III, § 8, bedienen.

Die jährlichen Nettoprämien ergeben sich auch bei Selektionstafeln analog zu (75), indem man die einmalige Nettoprämie durch den entsprechenden Leibrentenwert dividiert. Demnach erhält man die jährliche Nettoprämie $P_{[x]}$ für eine V. auf den Todesfall in der Höhe 1 mit lebenslänglicher Prämienzahlung analog zu (88)—(90) auf S. 90, indem man $A_{[x]}$ durch $\mathbf{a}_{[x]}$ dividiert. Es wird:

$$P_{[x]} = \frac{A_{[x]}}{1 + a_{[x]}} = \frac{A_{[x]}}{\mathbf{a}_{[x]}} \,, \tag{88$_1$}$$

$$P_{[x]} = v - 1 + \frac{1}{\mathbf{a}_{[x]}} \,, \tag{89$_1$}$$

$$P_{[x]} = \frac{M_{[x]}}{\mathbf{N}_{[x]}} \,. \tag{90$_1$}$$

Die jährliche Nettoprämie $P_{[x]\overline{n}|}$, die ein $x$jähriger für eine gemischte, beim Alter $x + n$ ablaufende Todesfallv. auf die Summe 1 zu zahlen hat, ergibt sich, wenn die Prämienzahlung bis zur Vollendung des $(x + n - 1)$ten Lebensjahres statthat, analog zu den Formeln (96)—(98) durch die Formeln:

$$P_{[x]\overline{n}|} = \frac{M_{[x]} - M_{[x]+n} + D_{[x]+n}}{\mathbf{N}_{[x]} - \mathbf{N}_{[x]+n}} \,, \tag{96$_1$}$$

$$P_{[x]\overline{n}|} = \frac{A_{[x]\overline{n}|}}{{}_{|n}\mathbf{a}_{[x]}} \,, \tag{97$_1$}$$

$$P_{[x]\overline{n|}} = v - 1 + \frac{1}{|_n\mathbf{a}_{[x]}}. \qquad (98_1)$$

Wir benötigen für das Folgende noch $\mathbf{a}_{[x]+z}$; hierunter versteht man den Kapitalwert, den eine Pränumerandoleibrente in der Höhe 1 für einen $(x+z)$jährigen besitzt, der sich bereits mit x Jahren versichert hat. Gehen wir von einer fingierten Gesellschaft von $l_{[x]}$ Personen aus, die eine Leibrente in der Höhe 1 kaufen; von diesen werden $l_{[x]+z}$ $(x+z)$ Jahre alt. Der Wert der Leistungen an diese $l_{[x]+z}$ Personen, von denen jede lebenslänglich, sofort beginnend, die Einheit erhält, beziffert sich auf

$$l_{[x]+z} + l_{[x]+z+1}\, v + \ldots + l_\omega\, v^{\omega-x-z}.$$

Für die einzelne der $l_{[x]+z}$ Personen ist mithin der $l_{[x]+z}$te Teil zu nehmen. Man erhält:

$$\mathbf{a}_{[x]+z} = \frac{l_{[x]+z} + l_{[x]+z+1}\, v + l_{[x]+z+2}\, v^2 + \ldots + l_\omega\, v^{\omega-x-z}}{l_{[x]+z}}.$$

z hat natürlich nur die Werte $0, 1, 2, \ldots, p-1$ anzunehmen; für die Schlußtafel ist:

$$\mathbf{a}_x = \frac{l_x + l_{x+1}\, v + l_{x+2}\, v^2 + \ldots + l_\omega\, v^{\omega-x}}{l_x}$$

und stellt den Kapitalwert einer Pränumerandoleibrente für eine $x$jährige Person dar, die p oder mehr Jahre versichert ist.

Bei einer Aggregattafel ist der Kapitalwert einer Pränumerandoleibrente für einen $(x+m)$jährigen, der sich mit x Jahren versichert hat, gleich dem einer Pränumerandoleibrente für einen $(x+m)$jährigen, der soeben frisch versichert wurde. Bei einer Selektionstafel liegt es anders. Dem Wesen der Selektionstafel entsprechend findet unter dem Bestand mit längerer V'sdauer ein stärkeres Absterben als unter den gleich-

altrigen frisch versicherten Personen statt; dies trifft sowohl für die Todesfallv. infolge der Auswahl der Anstalt, als auch für die Leibrentenv. infolge der Selbstauslese der V'slustigen statt. Daher wird bei Selektionstafeln der Preis einer Leibrente für sich frisch Versichernde höher sein als ihr Ablösungswert für bereits länger Versicherte des gleichen Lebensalters. Man wird stets $\mathfrak{a}_{[x]} > \mathfrak{a}_{[x-1]+1} > \mathfrak{a}_{[x-2]+2} > \ldots > \mathfrak{a}_x$ haben.

Die schon oben S. 156 genannte Tafel O[af] verzeichnet beim Zinsfuß von $3^1/_2$ %: $\mathfrak{a}_{[50]} = 15{,}647$, $\mathfrak{a}_{[49]+1} = 15{,}516$, $\mathfrak{a}_{[48]+2} = 15{,}428$, $\mathfrak{a}_{[47]+3} = 15{,}377$, $\mathfrak{a}_{[46]+4} = 15{,}354$, $\mathfrak{a}_{50} = 15{,}349$[1]). Eine fünfzigjährige Frau würde demnach eine nach einem Jahre beginnende, alljährlich fällige Leibrente in der Höhe von 100 Mk. durch eine einmalige Nettoprämie von 1464,70 Mk. erwerben; hingegen hat eine derartige Rente für eine ebenfalls fünfzigjährige Frau, die bereits ein Jahr versichert war und ihre Rente in Höhe von 100 Mk. am 50. Geburtstag bereits ausgezahlt erhalten hat, nur den Ablösungswert von 1451,60 Mk.; für eine gleichfalls fünfzigjährige Frau, die diese Rente vor fünf oder mehr Jahren gekauft hat, beträgt der Ablösungswert einer solchen Rente nur noch 1434,90 Mk.

Ebenso wie $\mathfrak{a}_{[x]+z}$ ist auch $A_{[x]+z}$ einzuführen. Wir definieren

$$A_{[x]+z} = \frac{d_{[x]+z}\, v + d_{[x]+z+1}\, v^2 + d_{[x]+z+2}\, v^3 + \ldots}{l_{[x]+z}}\,.$$

Durch Multiplikation von Zähler und Nenner mit v^{x+z} und Berücksichtigung von (XI_1), (XXI_1) und (XXII_1) wird:

$$A_{[x]+z} = \frac{C_{[x]+z} + C_{[x]+z+1} + C_{[x]+z+2} + \ldots}{D_{[x]+z}} = \frac{M_{[x]+z}}{D_{[x]+z}}\,.$$

$A_{[x]+z}$ stellt den Wert einer Todesfallv. für einen $(x+z)$jährigen dar, der sich bereits mit x Jahren versichert hat; denn nach $z$jähriger V'szeit ist die fingierte

[1]) British offices life annuity tables, S. 78.

Gesellschaft auf $l_{[x]+z}$ Personen zurückgegangen, von denen im $(z+1)$ten V'sjahre $d_{[x]+z}$, im $(z+2)$ten V'sjahre $d_{[x]+z+1}$ sterben usw. Analog zu Formel (42′) erhält man in Ergänzung der auf S. 166 hergeleiteten Formel ($42_1'$): $A_{[x]+z} = 1 + (v - 1)\,\mathrm{a}_{[x]+z}$.

Da Personen, bei denen seit der ärztlichen Untersuchung längere Zeit verflossen ist, zahlreicher als ihre Altersgenossen sterben, so wird der Kapitalwert einer Todesfallv. länger Versicherter größer als der kürzer Versicherter desselben Lebensalters sein. Mithin hat man

$$A_{[x]} < A_{[x-1]+1} < A_{[x-2]+2} < \ldots < A_x .$$

Für das Deckungskapital am Schlusse des $m$ten V'sjahres galt bei Zugrundelegung von Aggregattafeln die Formel (114):

$$_mV_x = A_{(m)} - P_x\,\mathrm{a}_{(m)} .$$

$A_{(m)}$ hatte die Bedeutung des Wertes der Leistungen der V'sgesellschaft an einen vor m Jahren Versicherten, der gegenwärtig $(x+m)$ Jahre alt ist. $\mathrm{a}_{(m)}$ war der Wert der Verpflichtungen einer bereits vor m Jahren versicherten, jetzt $(x+m)$jährigen Person, wenn man von ihr zum ersten Male sofort und dann alljährlich so lange, als die mit x Jahren versicherte Person Prämien zu zahlen hat, die Einheit zu beanspruchen hat. Bei einer Selektionstafel wird das Deckungskapital mit $_mV_{[x]}$, die jährliche Nettoprämie mit $P_{[x]}$ bezeichnet. Wir erhalten daher:

$$_mV_{[x]} = A_{(m)} - P_{[x]}\,\mathrm{a}_{(m)} . \qquad (114_1)$$

Wenden wir die Formel (114_1) auf die einfache Todesfallv. eines $x$jährigen mit jährlich gleichbleibender Prämienzahlung an. Der Wert der Leistungen der V'sanstalt für einen bereits m Jahre Versicherten wird hier offenbar $A_{[x]+m}$; der Wert $\mathrm{a}_{(m)}$ der Leistungen

des Versicherten beträgt $\mathfrak{a}_{[x]+m}$. Die Nettoprämie $P_{[x]}$ ist durch (88_1)—(90_1) gegeben. Mithin hat man in Analogie zu Formel (117) auf S. 123:

$$_{m}V_{[x]} = A_{[x]+m} - P_{[x]}\,\mathfrak{a}_{[x]+m}\,. \qquad (117_1)$$

Analog zu (119) kann (117_1) auch in:

$$_{m}V_{[x]} = 1 - \frac{\mathfrak{a}_{[x]+m}}{\mathfrak{a}_{[x]}} \qquad (119_1)$$

umgeformt werden. Ist die Selektionsperiode vorüber, d. h. $m \geqq p$, so fallen in (117_1) und (119_1) bei $\mathfrak{a}_{[x]+m}$ und $A_{[x]+m}$ die eckigen Klammern fort; denn der Index $[x]+z$ ist für jedes $z \geqq p$ stets durch $x+z$ zu ersetzen.

Wird von einer $x$jährigen Person eine gemischte Todesfallv. auf das Alter $x+n$ abgeschlossen, so findet man, wenn die versicherte Summe die Einheit ist, das Deckungskapital $_{m}V_{[x]}$ m Jahre nach Abschluß des Vertrages aus Formel (114_1) analog zur Formel (122) als:

$$_{m}V_{[x]} = A_{[x]+m\,\overline{n-m|}} - P_{[x]\,\overline{n|}}\;{}_{|n-m}\mathfrak{a}_{[x]+m}\,. \qquad (122_1)$$

Von den rechts auftretenden Größen wird die Prämie $P_{[x]\,\overline{n|}}$ durch (96_1)—(98_1) definiert; der Wert $A_{[x]+m\,\overline{n-m|}}$ der Leistungen der V'sanstalt ist gegeben durch:

$$A_{[x]+m\,\overline{n-m|}} = \frac{d_{[x]+m}v + d_{[x]+m+1}v^2 + \ldots + d_{[x]+n-1}v^{n-m} + l_{[x]+n}v^{n-m}}{l_{[x]+m}}$$

$$= \frac{C_{[x]+m} + C_{[x]+m+1} + \ldots + C_{[x]+n-1} + D_{[x]+n}}{D_{[x]+m}}$$

$$= \frac{M_{[x]+m} - M_{[x]+n} + D_{[x]+n}}{D_{[x]+m}}\,.$$

In Analogie mit (25_1)—(27_1) hat ${}_{|n-m}\mathfrak{a}_{[x]+m}$ den Wert

$$\frac{l_{[x]+m} + l_{[x]+m+1}\,v + \ldots + l_{[x]+n-1}\,v^{n-m-1}}{l_{[x]+m}}$$
$$= \frac{D_{[x]+m} + D_{[x]+m+1} + \ldots + D_{[x]+n-1}}{D_{[x]+m}}$$
$$= \frac{\mathbf{N}_{[x]+m} - \mathbf{N}_{[x]+n}}{D_{[x]+m}}\,.$$

Analog zu (123) drückt sich das Deckungskapital auch durch $1 - \frac{|_{n-m}\mathbf{a}_{[x]+m}}{|_{n}\mathbf{a}_{[x]}}$ aus.

In bezug auf das durch eine Selektionstafel für eine Todesfallv. bestimmte Deckungskapital führt der Eidgenössische Bericht treffend aus: „Angenommen, eine neugegründete V'sgesellschaft würde ihre Tarife und Rechnungsabschlüsse auf Selektionstafeln basieren. Dann würde jene Untersterblichkeit, die sonst mit einem Bestande von ausschließlich neuen V'en bei Anwendung der Aggregattafel gewöhnlich verknüpft ist, nicht in Erscheinung treten. Dagegen müßte das Deckungskapital für die künftigen Verpflichtungen höher ausfallen. Die Gesellschaft wäre somit nicht in der Lage, die nach der Aggregattafel sich ergebenden Untersterblichkeitsgewinne unter ihre Versicherten oder unter die Aktionäre zu verteilen oder — der gewöhnliche Fall — sie zur Deckung der ersten Unkosten neuer Policen zu verwenden. Sie hätte eben größere Reserven zu bestellen. In der Tat ist das Deckungskapital nach der Selektionstafel vorwiegend höher als nach der Aggregattafel."[1]) Bemerkt sei noch, daß bei Wahl einer Selektionstafel sogar noch beschränktes Zillmern ein höheres Deckungskapital liefern kann als die Nettomethode bei einer Aggregattafel.

[1]) Bericht des Eidg. V'samtes über das Jahr 1903, S. LXXV.

Sterblichkeitstafel 23 D. G. M u. W I.

Normal versicherte Männer und Frauen mit vollständiger ärztlicher Untersuchung.

Alter Jahre x	Sterbenswahrscheinlichkeit q_x	Anzahl der Lebenden l_x	Anzahl der jährlichen Sterbefälle $d_x = l_x - l_{x+1}$
17	0,00886	102787	909
18	0,00920	101878	936
19	0,00934	100942	942
20	0,00920	100000	919
21	0,00917	99081	908
22	0,00903	98173	887
23	0,00884	97286	861
24	0,00866	96425	835
25	0,00854	95590	816
26	0,00848	94774	804
27	0,00848	93970	797
28	0,00854	93173	795
29	0,00867	92378	800
30	0,00883	91578	808
31	0,00901	90770	818
32	0,00923	89952	831
33	0,00945	89121	841
34	0,00970	88280	856
35	0,00998	87424	873
36	0,01027	86551	889
37	0,01059	85662	906
38	0,01095	84756	928
39	0,01133	83828	950
40	0,01177	82878	975

Alter Jahre x	Sterbenswahrscheinlichkeit q_x	Anzahl der Lebenden l_x	Anzahl der jährlichen Sterbefälle $d_x = l_x - l_{x+1}$
41	0,01229	81903	1006
42	0,01279	80897	1035
43	0,01332	79862	1063
44	0,01385	78799	1092
45	0,01437	77707	1117
46	0,01489	76590	1140
47	0,01550	75450	1169
48	0,01621	74281	1204
49	0,01706	73077	1246
50	0,01814	71831	1303
51	0,01931	70528	1362
52	0,02061	69166	1425
53	0,02199	67741	1490
54	0,02349	66251	1556
55	0,02505	64695	1621
56	0,02680	63074	1691
57	0,02867	61383	1759
58	0,03073	59624	1832
59	0,03289	57792	1900
60	0,03536	55892	1976
61	0,03782	53916	2038
62	0,04042	51878	2097
63	0,04317	49781	2149
64	0,04613	47632	2197
65	0,04943	45435	2246
66	0,05329	43189	2302
67	0,05762	40887	2355
68	0,06226	38532	2399
69	0,06731	36133	2432

Alter Jahre x	Sterbenswahrscheinlichkeit q_x	Anzahl der Lebenden l_x	Anzahl der jährlichen Sterbefälle $d_x = l_x - l_{x+1}$
70	0,07276	33701	2452
71	0,07856	31249	2455
72	0,08459	28794	2436
73	0,09130	26358	2406
74	0,09854	23952	2360
75	0,10649	21592	2299
76	0,11451	19293	2210
77	0,12312	17083	2103
78	0,13233	14980	1982
79	0,14219	12998	1848
80	0,15514	11150	1730
81	0,16974	9420	1599
82	0,18451	7821	1443
83	0,19825	6378	1264
84	0,21112	5114	1080
85	0,22200	4034	896
86	0,22805	3138	715
87	0,23368	2423	566
88	0,23788	1857	442
89	(0,24316)	1415	



Verzeichnis der erschienenen Bände.

B. Verzeichnis nach Wissenschaften.

Bibliothek zur Philosophie.

Einführung in die Philosophie von Dr. Max Wentscher, Professor an der Universität Königsberg. Nr. 281.

Geschichte der Philosophie IV: Neuere Philosophie bis Kant von Dr. Bruno Bauch, Privatdoz. an der Univers. Halle a. S. Nr. 394.

Psychologie und Logik zur Einführung in die Philosophie von Professor Dr. Th. Elsenhans. Mit 13 Figuren. Nr. 14.

Grundriß der Psychophysik von Professor Dr. G. F. Lipps in Leipzig. Mit 3 Figuren. Nr. 98.

Ethik von Prof. Dr. Thommas Achelis in Breen. Nr. 90.

Allgemeine Ästhetik von Prof. Dr. Max Diez, Lehrer an der Kgl. Akademie der bildenden Künste in Stuttgart. Nr. 300.

☛ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Bibliothek zur Sprachwissenschaft.

Indogermanische Sprachwissenschaft von Dr. R. Meringer, Professor an der Universität Graz. Mit 1 Tafel. Nr. 59.

Germanische Sprachwissenschaft von Dr. Rich. Loewe in Berlin. Nr. 238.

Romanische Sprachwissenschaft von Dr. Adolf Zauner, Privatdozent an der Universität Wien. 2 Bände. Nr. 128, 250.

Semitische Sprachwissenschaft von Dr. C. Brockelmann, Professor an der Universität Königsberg. Nr. 291.

Finnisch-ugrische Sprachwissenschaft von Prof. Dr. Josef Szinnyei in Budapest. Nr. 463.

Deutsche Grammatik und kurze Geschichte der deutschen Sprache von Schulrat Professor Dr. O. Lyon in Dresden. Nr. 20.

Deutsche Poetik von Dr. K. Borinski, Professor an der Universität München. Nr. 40.

Deutsche Redelehre von Hans Probst, Gymnasialprof. in Bamberg. Nr. 61.

Aufsatzentwürfe von Oberstudienrat Dr. L. W. Straub, Rektor des Eberhard-Ludwigs-Gymnasiums in Stuttgart. Nr. 17.

Wörterbuch nach der neuen deutschen Rechtschreibung v. Dr. Heinrich Klenz. Nr. 200.

Deutsches Wörterbuch von Dr. Richard Loewe in Berlin. Nr. 64.

Das Fremdwort im Deutschen von Dr. Rud. Kleinpaul in Leipzig. Nr. 55.

Deutsches Fremdwörterbuch von Dr. Rudolf Kleinpaul in Leipzig. Nr. 273.

Plattdeutsche Mundarten v. Prof. Dr. Hub. Grimme, Freiburg (Schweiz). Nr. 461.

Die deutschen Personennamen von Dr. Rudolf Kleinpaul in Leipzig. Nr. 422.

Englisch-deutsches Gesprächsbuch von Professor Dr. E. Hausknecht in Lausanne. Nr. 424.

Grundriß der lateinischen Sprachlehre v. Prof. Dr. W. Votsch i. Magdeburg. Nr. 82.

Russische Grammatik von Dr. Erich Berneker, Prof. an der Universit. Prag. Nr. 66.

Russisch-Deutsches Gesprächsbuch von Dr. Erich Berneker, Professor an der Universität Prag. Nr. 68.

Russisches Lesebuch mit Glossar v. Dr. Erich Berneker, Prof. a. d. Univ. Prag. Nr. 67.

Russische Literatur v. Dr. Erich Boehme, Lektor an d. Handelshochschule Berlin.
I. Teil: Auswahl moderner Prosa und Poesie mit ausführlichen Anmerkungen und Akzentbezeichnung. Nr. 403.
— — II. Teil: Всеволодъ Гаршинъ, Разсказы. Mit Anmerkungen und Akzentbezeichnung. Nr. 404.

Geschichte der klassischen Philologie von Dr. Wilh. Kroll, ord. Prof. an der Universität Münster. Nr. 367.

Siehe auch „Handelswissenschaftliche Bibliothek".

☛ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Literaturgeschichtliche Bibliothek.

Deutsche Literaturgeschichte von Dr. Max Koch, Professor an der Universität Breslau. Nr. 31.

Deutsche Literaturgeschichte der Klassikerzeit von Prof. Carl Weitbrecht. Durchgesehen und ergänzt von Karl Berger. Nr. 161.

Deutsche Literaturgeschichte des 19. Jahrhunderts von Carl Weitbrecht. Durchgesehen und ergänzt von Dr. Richard Weitbrecht in Wimpfen. 2 Teile. Nr. 134, 135.

Geschichte des deutschen Romans von Dr. Hellmuth Mielke. Nr. 229.

Gotische Sprachdenkmäler mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen von Dr. Herm. Jantzen, Dir. d. Königin Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 79.

Althochdeutsche Literatur mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen von Th. Schauffler, Prof. am Realgymnasium in Ulm. Nr. 28.

Eddalieder mit Grammatik, Übersetzung und Erläuterungen von Dr. Wilh. Ranisch, Gymnasialoberlehrer in Osnabrück. Nr. 171.

Das Walthari-Lied. Ein Heldensang aus dem 10. Jahrhundert im Versmaße der Urschrift übersetzt u. erläutert v. Prof. Dr. H. Althof in Weimar. Nr. 46.

Dichtungen aus mittelhochdeutscher Frühzeit. In Auswahl mit Einleitungen und Wörterbuch herausgegeben von Dr. Hermann Jantzen, Direktor der Königin Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 137.

Der Nibelunge Nôt in Auswahl und **mittelhochdeutsche Grammatik** mit kurzem Wörterbuch von Dr. W. Golther, Prof. an der Universität Rostock. Nr. 1.

Kudrun und Dietrichepen. Mit Einleitung und Wörterbuch von Dr. O. L. Jiriczek, Prof. an der Universität Münster. Nr. 10.

Hartmann von Aue, Wolfram von Eschenbach und Gottfried von Straßburg. Auswahl aus dem höfischen Epos mit Anmerkungen und Wörterbuch v. Dr. K. Marold, Prof. a. Kgl. Friedrichskollegium zu Königsberg i. Pr. Nr. 22.

Walther von der Vogelweide mit Auswahl aus **Minnesang und Spruchdichtung.** Mit Anmerkungen und einem Wörterbuch von O. Güntter, Prof. an der Oberrealschule und an der Techn. Hochschule in Stuttgart. Nr. 23.

Die Epigonen des höfischen Epos. Auswahl aus deutschen Dichtungen des 13. Jahrhunderts von Dr. Viktor Junk, Aktuarius der Kais. Akademie der Wissenschaften in Wien. Nr. 289.

Literaturdenkmäler des 14. und 15. Jahrhunderts, ausgewählt und erläutert von Dr. Hermann Jantzen, Direktor der Königin Luise-Schule in Königsberg i. Pr. Nr. 181.

Literaturdenkmäler des 16. Jahrhunderts. I: Martin Luther, Thomas Murner und das Kirchenlied des 16. Jahrhunderts. Ausgewählt und mit Einleitungen und Anmerkungen versehen von Prof. G. Berlit, Oberlehrer am Nikolaigymnasium zu Leipzig. Nr. 7.

— **II: Hans Sachs.** Ausgewählt u. erläutert v. Professor Dr. Julius Sahr. Nr. 24.

— **III: Von Brant bis Rollenhagen: Brant, Hutten, Fischart, sowie Tierepos und Fabel.** Ausgewählt u. erläutert von Prof. Dr. Julius Sahr. Nr. 36.

Deutsche Literaturdenkmäler des 17. und 18. Jahrhunderts von Dr. Paul Legband in Berlin. 1. Teil. Nr. 364.

Simplicius Simplicissimus von Hans Jakob Christoffel von Grimmelshausen. In Auswahl herausgegeben von Prof. Dr. F. Bobertag, Dozent an der Universität Breslau. Nr. 138.

Das deutsche Volkslied. Ausgewählt und erläutert von Professor Dr. Julius Sahr. 2 Bändchen. Nr. 25, 132.

Englische Literaturgeschichte von Dr. Karl Weiser in Wien. Nr. 69.

Grundzüge und Haupttypen der englischen Literaturgeschichte von Dr. Arnold M. M. Schröer, Prof. an der Handelshochschule in Köln. 2 Teile. Nr. 286, 287.

Italienische Literaturgeschichte von Dr. Karl Voßler, Prof. an der Universität Heidelberg. Nr. 125.

Spanische Literaturgeschichte von Dr. Rudolf Beer in Wien. 2 Bde. Nr. 167, 168.

Portugiesische Literaturgeschichte von Dr. Karl von Reinhardstoettner, Prof. an der Königl. Technischen Hochschule München. Nr. 213.

Russische Literaturgeschichte von Dr. Georg Polonskij in München. Nr. 166.

Slavische Literaturgeschichte von Dr. Josef Karásek in Wien. I: Ältere Literatur bis zur Wiedergeburt. Nr. 277.

— II: Das 19. Jahrhundert. Nr. 278.

Nordische Literaturgeschichte. I: Die isländische und norwegische Literatur des Mittelalters von Dr. Wolfgang Golther, Prof. an der Univ. Rostock. Nr. 254.

Die Hauptliteraturen des Orients von Dr. Mich. Haberlandt, Privatdozent an der Universität Wien. I: Die Literaturen Ostasiens und Indiens. Nr. 162.

— II: Die Literaturen der Perser, Semiten und Türken. Nr. 163.

Griechische Literaturgeschichte mit Berücksichtigung der Geschichte der Wissenschaften von Dr. Alfred Gercke, Prof. an der Univers. Greifswald. Nr. 70.

Römische Literaturgeschichte von Dr. Herm. Joachim in Hamburg. Nr. 52.

Die Metamorphosen des P. Ovidius Naso. In Auswahl mit einer Einleitung und Anmerkungen herausgegeben von Dr. Julius Ziehen in Frankfurt a. M. Nr. 442.

☛ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Geschichtliche Bibliothek.

Einleitung in die Geschichtswissenschaft von Dr. Ernst Bernheim, Prof. an der Universität Greifswald. Nr. 270.

Urgeschichte der Menschheit von Dr. Moriz Hoernes, Prof. an der Universität in Wien. Mit 53 Abbildungen. Nr. 42.

Geschichte des alten Morgenlandes von Dr. Fr. Hommel, o. ö. Prof. der semitischen Sprachen an der Universität in München. Mit 9 Voll- und Textbildern und 1 Karte des Morgenlandes. Nr. 43.

Geschichte Israels bis auf die griechische Zeit von Lic. Dr. J. Benzinger. Nr. 231.

Neutestamentliche Zeitgeschichte I: Der historische und kulturgeschichtliche Hintergrund des Urchristentums von Lic. Dr. W. Staerk, Professor an der Universität Jena. Mit 3 Karten. Nr. 325.

— **II:** Die Religion des Judentums im Zeitalter des Hellenismus und der Römerherrschaft. Mit einer Planskizze. Nr. 326.

Griechische Geschichte von Dr. Heinrich Swoboda, Prof. an der Deutschen Univ. Prag. Nr. 49.

Griechische Altertumskunde von Prof. Dr. Rich. Maisch, neubearbeitet von Rektor Dr. Franz Pohlhammer. Mit 9 Vollbildern. Nr. 16.

Römische Geschichte von Realgymnasialdirektor Dr. Julius Koch in Grunewald. Nr. 19.

Römische Altertumskunde von Dr. Leo Bloch in Wien. Mit 8 Vollbild. Nr. 45.

Geschichte des Byzantinischen Reiches von Dr. K. Roth in Kempten. Nr. 190.

Deutsche Geschichte I: Mittelalter (bis 1519) von Prof. Dr. F. Kurze, Oberlehrer am Kgl. Luisengymnasium in Berlin. Nr. 33.

— **II: Zeitalter der Reformation und der Religionskriege** (1500—1648) von Prof. Dr. F. Kurze, Oberlehrer am Kgl. Luisengymn. in Berlin. Nr. 34.

— **III: Vom Westfälischen Frieden bis zur Auflösung des alten Reichs** (1648 bis 1806) von Prof. Dr. F. Kurze, Oberlehrer am Kgl. Luisengymnasium in Berlin. Nr. 35.

Deutsche Stammeskunde von Dr. Rudolf Much, Prof. an der Universität in Wien. Mit 2 Karten und 2 Tafeln. Nr. 126.

Die deutschen Altertümer von Dr. Franz Fuhse, Direktor des Städt. Museums in Braunschweig. Mit 70 Abbildungen. Nr. 124.

Abriß der Burgenkunde von Hofrat Dr. Otto Piper in München. Mit 30 Abbildungen. Nr. 119.

Deutsche Kulturgeschichte von Dr. Reinh. Günther. Nr. 56.

Deutsches Leben im 12. u. 13. Jahrhundert. Realkommentar zu den Volks- und Kunstepen und zum Minnesang. I: Öffentliches Leben. Von Prof. Dr. Jul. Dieffenbacher in Freiburg i. B. Mit 1 Tafel u. Abbildungen. Nr. 93.

— II: Privatleben. Mit Abbildungen. Nr. 328.

Quellenkunde zur Deutschen Geschichte von Dr. Carl Jacob, Prof. an der Universität in Tübingen. 1. Band. Nr. 279.

Österreichische Geschichte. I: Von der Urzeit bis zum Tode König Albrechts II. (1439) von Prof. Dr. Franz von Krones, neubearbeitet von Dr. Karl Uhlirz, Prof. an der Univ. Graz. Mit 11 Stammtafeln. Nr. 104.

— II: Vom Tode König Albrechts II. bis zum Westfälischen Frieden (1440 bis 1648) von Prof. Dr. Franz von Krones, neubearbeitet von Dr. Karl Uhlirz, Prof. an der Universität Graz. Mit 2 Stammtafeln. Nr. 105.

Englische Geschichte von Prof. L. Gerber, Oberlehrer in Düsseldorf. Nr. 375.

Französische Geschichte von Dr. R. Sternfeld, Prof. an der Univ. Berlin. Nr. 85.

Russische Geschichte von Dr. Wilhelm Reeb, Oberlehrer am Ostergymnasium in Mainz. Nr. 4.

Polnische Geschichte von Dr. Clemens Brandenburger in Posen. Nr. 338.

Spanische Geschichte von Dr. Gust. Diercks. Nr. 266.

Schweizerische Geschichte v. Dr. K. Dändliker, Prof. a. d. Univ. Zürich. Nr. 188.

Geschichte der christlichen Balkanstaaten (Bulgarien, Serbien, Rumänien, Montenegro, Griechenland) von Dr. K. Roth in Kempten. Nr. 331.

Bayerische Geschichte von Dr. Hans Ockel in Augsburg. Nr. 160.
Geschichte Frankens von Dr. Christian Meyer, Kgl. preuß. Staatsarchivar a. D. in München. Nr. 434.
Sächsische Geschichte von Prof. Otto Kaemmel, Rektor des Nikolaigymnasiums zu Leipzig. Nr. 100.
Thüringische Geschichte von Dr. Ernst Devrient in Jena. Nr. 352.
Badische Geschichte von Dr. Karl Brunner, Prof. am Gymnasium in Pforzheim u. Privatdozent der Geschichte an der Techn. Hochschule in Karlsruhe. Nr. 230.
Württembergische Geschichte von Dr. Karl Weller, Professor am Karlsgymnasium in Stuttgart. Nr. 462.
Geschichte Lothringens von Geh. Reg.-R. Dr. Herm. Derichsweiler in Straßburg. Nr. 6.
Die Kultur der Renaissance. Gesittung, Forschung, Dichtung von Dr. Robert F. Arnold, Professor an der Universität Wien. Nr. 189.
Geschichte des 19. Jahrhunderts von Oskar Jäger, o. Honorarprofessor an der Universität Bonn. 1. Bändchen: 1800—1852. Nr. 216.
— 2. Bändchen: 1853 bis Ende des Jahrhunderts. Nr. 217.
Kolonialgeschichte von Dr. Dietrich Schäfer, Prof. der Geschichte an der Univ. Berlin. Nr. 156.
Die Seemacht in der deutschen Geschichte von Wirkl. Admiralitätsrat Dr. Ernst von Halle, Prof. an der Universität Berlin. Nr. 370.

☛ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Geographische Bibliothek.

Physische Geographie von Dr. Siegm. Günther, Professor an der Königl. Technischen Hochschule in München. Mit 32 Abbildungen. Nr. 26.
Astronomische Geographie von Dr. Siegm. Günther, Professor an der Königl. Technischen Hochschule in München. Mit 52 Abbildungen. Nr. 92.
Klimakunde. I: Allgemeine Klimalehre von Professor Dr. W. Köppen, Meteorologe der Seewarte Hamburg. Mit 7 Tafeln u. 2 Figuren. Nr. 114.
Meteorologie von Dr. W. Trabert, Professor a. d. Universität in Innsbruck. Mit 49 Abbildungen und 7 Tafeln. Nr. 54.
Physische Meereskunde von Prof. Dr. Gerhard Schott, Abteilungsvorsteher an der Deutschen Seewarte in Hamburg. Mit 28 Abb. im Text u. 8 Tafeln. Nr. 112.
Paläogeographie. Geologische Geschichte der Meere u. Festländer v. Dr. Franz Kossmat in Wien. Mit 6 Karten. Nr. 406.
Paläoklimatologie von Dr. Wilh. R. Eckardt in Aachen. Nr. 482.
Das Eiszeitalter von Dr. Emil Werth in Berlin-Wilmersdorf. Mit 17 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 431.
Die Alpen von Dr. Rob. Sieger, Prof. an der Universität Graz. Mit 19 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 129.
Gletscherkunde von Dr. Fritz Machacek in Wien. Mit 5 Abbildungen im Text und 11 Tafeln. Nr. 154.
Pflanzengeographie von Prof. Dr. Ludwig Diels, Privatdoz. an der Univers. Berlin. Nr. 389.
Tiergeographie von Dr. Arnold Jacobi, Professor der Zoologie an der Königl. Forstakademie zu Tharandt. Mit 2 Karten. Nr. 218.

Länderkunde von Europa von Dr. Franz Heiderich, Professor am Francisco-Josephinum in Mödling. Mit 14 Textkärtchen und Diagrammen und einer Karte der Alpeneinteilung. Nr. 62.

— **der außereuropäischen Erdteile** von Dr. Franz Heiderich, Professor am Francisco-Josephinum in Mödling. Mit 11 Textkärtchen u. Profil. Nr. 63.

Landeskunde und Wirtschaftsgeographie des Festlandes Australien von Dr. Kurt Hassert, Professor an der Handelshochschule in Köln. Mit 8 Abbildungen, 6 graphischen Tabellen und 1 Karte. Nr. 319.

— **von Baden** von Professor Dr. O. Kienitz in Karlsruhe. Mit Profilen, Abbildungen und 1 Karte. Nr. 199.

— **des Königreichs Bayern** von Dr. W. Götz, Professor an der Königl. Techn. Hochschule München. Mit Profilen, Abbildungen und 1 Karte. Nr. 176.

— **der Republik Brasilien** von Rodolpho von Ihering. Mit 12 Abbildungen und einer Karte. Nr. 373.

— **von Britisch-Nordamerika** von Professor Dr. A. Oppel in Bremen. Mit 13 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 284.

— **von Elsaß-Lothringen** von Prof. Dr. R. Langenbeck in Straßburg i. E. Mit 11 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 215.

— **des Großherzogtums Hessen, der Provinz Hessen-Nassau und des Fürstentums Waldeck** von Prof. Dr. Georg Greim in Darmstadt. Mit 13 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 376.

— **der Iberischen Halbinsel** v. Dr. Fritz Regel, Prof. a. d. Univ. Würzburg. Mit 8 Kärtchen und 8 Abbildungen im Text und 1 Karte im Farbendruck. Nr. 235.

— **von Österreich-Ungarn** von Dr. Alfred Grund, Professor an der Universität Berlin. Mit 10 Textillustrationen und 1 Karte. Nr. 244.

— **der Rheinprovinz** von Dr. V. Steinecke, Direktor des Realgymnasiums in Essen. Mit 9 Abb., 3 Kärtchen und 1 Karte. Nr. 308.

— **des Europäischen Rußlands nebst Finnlands** von Dr. Alfred Philippson, ord. Prof. der Geographie an der Universität Halle a. S. Mit 9 Abbildungen, 7 Textkarten und einer lithographischen Karte. Nr. 359.

— **des Königreichs Sachsen** von Dr. J. Zemmrich, Oberlehrer am Realgymnasium in Plauen. Mit 12 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 258

— **der Schweiz** von Professor Dr. H. Walser in Bern. Mit 16 Abbildungen und einer Karte. Nr. 398.

— **von Skandinavien** (Schweden, Norwegen und Dänemark) von Heinrich Kerp, Lehrer am Gymnasium und Lehrer der Erdkunde am Comenius-Seminar zu Bonn. Mit 11 Abbildungen und 1 Karte. Nr. 202.

— **der Vereinigten Staaten von Nordamerika** von Prof. Heinrich Fischer, Oberlehrer am Luisenstädtischen Realgymnasium in Berlin. Mit Karten, Figuren im Text und Tafeln. 2 Bändchen. Nr. 381, 382.

— **des Königreichs Württemberg** von Dr. Kurt Hassert, Professor an der Handelshochschule in Köln. Mit 16 Vollbildern und 1 Karte. Nr. 157.

Die deutschen Kolonien I: Togo und Kamerun von Prof. Dr. Karl Dove. Mit 16 Tafeln und einer lithographischen Karte. Nr. 441.

Landes- und Volkskunde Palästinas von Privatdozent Dr. G. Hölscher in Halle a. S. Mit 8 Vollbildern und einer Karte. Nr. 345.

Völkerkunde von Dr. Michael Haberlandt, Privatdozent an der Universität Wien. Mit 56 Abbildungen. Nr. 73.

Kartenkunde, geschichtlich dargestellt von E. Gelcich, Direktor der k. k. Nautischen Schule in Lussinpiccolo, F. Sauter, Professor am Realgymnasium in Ulm und Dr. Paul Dinse, Assistent der Gesellschaft für Erdkunde in Berlin, neu bearbeitet von Dr. M. Groll, Kartograph in Berlin. Mit 71 Abbildungen. Nr. 30.

☛ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Mathematische Bibliothek.

Geschichte der Mathematik von Dr. A. Sturm, Professor am Obergymnasium in Seitenstetten. Nr. 226.

Arithmetik und Algebra von Dr. Hermann Schubert, Prof. an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 47.

Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra von Dr. Hermann Schubert, Prof. an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 48.

Algebraische Kurven von Eugen Beutel, Oberreallehrer in Vaihingen-Enz. I: Kurvendiskussion. Mit 57 Figuren im Text. Nr. 435.

Determinanten von Paul B. Fischer, Oberlehrer an der Oberrealschule zu Groß-Lichterfelde. Nr. 402.

Ebene Geometrie mit 110 zweifarb. Figuren von G. Mahler, Prof. am Gymnasium in Ulm. Nr. 41.

Darstellende Geometrie I mit 110 Figuren von Dr. Rob. Haußner, Prof. an der Universität Jena. Nr. 142.

— — II. Mit 40 Figuren. Nr. 143.

Ebene und sphärische Trigonometrie mit 70 Fig. von Dr. Gerhard Hessenberg, Professor an der Landwirtschaftl. Akademie Bonn-Poppelsdorf. Nr. 99.

Stereometrie mit 44 Figuren von Dr. R. Glaser in Stuttgart. Nr. 97.

Niedere Analysis mit 6 Fig. von Prof. Dr. Benedikt Sporer in Ehingen. Nr. 53.

Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt von Dr. Hermann Schubert, Prof. an der Gelehrtenschule des Johanneums in Hamburg. Nr. 81.

Fünfstellige Logarithmen von Professor Aug. Adler, Direktor der k. k. Staatsoberrealschule in Wien. Nr. 423.

Analytische Geometrie der Ebene mit 57 Figuren von Prof. Dr. M. Simon in Straßburg. Nr. 65.

Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie der Ebene mit 32 Fig. von O. Th. Bürklen, Professor am Realgymnasium in Schwäb.-Gmünd. Nr. 256.

Analytische Geometrie des Raumes mit 28 Abbildungen von Professor Dr. M. Simon in Straßburg. Nr. 89.

Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie des Raumes mit 8 Fig. von O. Th. Bürklen, Prof. am Realgymnasium in Schwäb.-Gmünd. Nr. 309.

Höhere Analysis I: Differentialrechnung mit 68 Figuren von Dr. Friedrich Junker, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. Nr. 87.

— **II: Integralrechnung** mit 89 Figuren von Dr. Friedrich Junker, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. Nr. 88.

Repetitorium und Aufgabensammlung zur Differentialrechnung mit 46 Fig. von Dr. Friedr. Junker, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. Nr. 146.

Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung mit 52 Fig. von Dr. Friedr. Junker, Prof. am Karlsgymnasium in Stuttgart. Nr. 147.

Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung mit 91 Fig. von Dr. K. Doehlemann, Prof. an der Universität München. Nr. 72.

Mathematische Formelsammlung und Repetitorium der Mathematik, enth. die wichtigsten Formeln und Lehrsätze der Arithmetik, Algebra, algebraischen Analysis, ebenen Geometrie, Stereometrie, ebenen und sphärischen Trigonometrie, math. Geographie, analyt. Geometrie der Ebene und des Raumes, der Differential- und Integralrechnung von O. Th. Bürklen, Prof. am Kgl. Realgymnasium in Schw.-Gmünd. Mit 18 Figuren. Nr. 51.

Versicherungsmathematik von Dr. Alfred Loewy, Prof. an der Universität Freiburg i. Br. Nr. 180.

Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate mit 15 Fig. und 2 Tafeln von Wilh. Weitbrecht, Professor der Geodäsie in Stuttgart. Nr. 302.

Vektoranalysis von Dr. Siegfr. Valentiner, Privatdozent für Physik an der Universität Berlin. Mit 11 Figuren. Nr. 354.

Astronomische Geographie mit 52 Figuren von Dr. Siegm. Günther, Prof. an der Techn. Hochschule in München. Nr. 92.

Astrophysik. Die Beschaffenheit der Himmelskörper von Dr. Walter F. Wislicenus, Prof. an der Universität Straßburg. Mit 11 Abbildungen. Nr. 91.

Astronomie. Größe, Bewegung und Entfernung der Himmelskörper von A. F. **Möbius,** neubearb. von Dr. W. F. Wislicenus, Prof. an der Univ. Straßburg. Mit 36 Abbildungen und 1 Sternkarte. Nr. 11.

Geodäsie mit 66 Abbildungen von Dr. C. Reinhertz, Prof. an der Techn. Hochschule Hannover. Nr. 102.

Nautik. Kurzer Abriß des täglich an Bord von Handelsschiffen angewandten Teils der Schiffahrtskunde mit 56 Abbildungen von Dr. Franz Schulze, Direktor der Navigationsschule zu Lübeck. Nr. 84.

Geometrisches Zeichnen von H. Becker, Architekt und Lehrer an der Baugewerkschule in Magdeburg, neu bearbeitet von Prof. J. Vonderlinn, Direktor der Kgl. Baugewerkschule zu Munster i. W. Mit 290 Figuren und 23 Tafeln im Text. Nr. 58.

☛ Weitere Bände sind in Vorbereitung. Gleichzeitig macht die Verlagshandlung auf die „Sammlung Schubert", eine Sammlung mathematischer Lehrbücher, aufmerksam. Ein vollständiges Verzeichnis dieser Sammlung befindet sich am Schluß dieses Prospektes. Außerdem kann ein ausführlicher mathematischer Katalog der G. J. Göschen'schen Verlagshandlung kostenfrei durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Naturwissenschaftliche Bibliothek.

Paläontologie und Abstammungslehre von Prof. Dr. Karl Diener in Wien. Mit 9 Abbildungen. Nr. 460.

Der menschliche Körper, sein Bau und seine Tätigkeiten, von E. Rebmann, Oberschulrat in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre von Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abbildungen und 1 Tafel. Nr. 18.

Urgeschichte der Menschheit von Dr. Moriz Hoernes, Prof. an der Universität Wien. Mit 53 Abbildungen. Nr. 42.

Völkerkunde von Dr. Michael Haberlandt, k. u. k. Kustos der ethnogr. Sammlung des naturhistor. Hofmuseums u. Privatdozent an der Universität Wien. Mit 51 Abbildungen. Nr. 73.

Tierkunde von Dr. Franz v. Wagner, Prof. an der Universität Graz. Mit 78 Abbildungen. Nr. 60.

Abriß der Biologie der Tiere von Dr. Heinrich Simroth, Professor an der Universität Leipzig. Nr. 131.

Tiergeographie von Dr. Arnold Jacobi, Prof. der Zoologie an der Kgl. Forstakademie zu Tharandt. Mit 2 Karten. Nr. 218.

Das Tierreich. I: Säugetiere, von Oberstudienrat Prof. Dr. Kurt Lampert, Vorsteher des Kgl. Naturalienkabinetts in Stuttgart. Mit 15 Abbild. Nr. 282.

— **III: Reptilien und Amphibien.** Von Dr. Franz Werner, Privatdozent an der Universität Wien. Mit 48 Abbildungen. Nr. 383.

— **IV: Fische,** von Dr. Max Rauther, Privatdozent der Zoologie an der Universität Gießen. Mit 37 Abbildungen. Nr. 356.

— **VI: Die wirbellosen Tiere** von Dr. Ludwig Böhmig, Prof. der Zoologie an der Universität Graz. I: Urtiere, Schwämme, Nesseltiere, Rippenquallen und Würmer. Mit 74 Figuren. Nr. 439.

Entwicklungsgeschichte der Tiere von Dr. Johs. Meisenheimer, Professor der Zoologie an der Universität Marburg. I: Furchung, Primitivanlagen, Larven, Formbildung, Embryonalhüllen. Mit 48 Fig. Nr. 378.

— **II:** Organbildung. Mit 46 Figuren. Nr. 379.

Schmarotzer und Schmarotzertum in der Tierwelt. Erste Einführung in die tierische Schmarotzerkunde von Dr. Franz v. Wagner, Professor an der Universität Graz. Mit 67 Abbildungen. Nr. 151.

Geschichte der Zoologie von Dr. Rud. Burckhardt, weil. Direktor der Zoologischen Station des Berliner Aquariums in Rovigno (Istrien). Nr. 357.

Die Pflanze, ihr Bau und ihr Leben von Professor Dr. E. Dennert in Godesberg. Mit 96 Abbildungen. Nr. 44.

Das Pflanzenreich. Einteilung des gesamten Pflanzenreichs mit den wichtigsten und bekanntesten Arten von Dr. F. Reinecke in Breslau und Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Fig. Nr. 122.

Pflanzenbiologie von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbildungen. Nr. 127.

Pflanzengeographie von Prof. Dr. Ludwig Diels, Privatdoz. an der Univers. Berlin. Nr. 389.

Morphologie, Anatomie und Physiologie der Pflanzen von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbildungen. Nr. 141.

Die Pflanzenwelt der Gewässer von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. Mit 50 Abbildungen. Nr. 158.

Exkursionsflora von Deutschland zum Bestimmen der häufigeren in Deutschland wildwachsenden Pflanzen von Dr. W. Migula, Prof. an der Forstakademie Eisenach. 2 Teile. Mit 100 Abbildungen. Nr. 268, 269.

Die Nadelhölzer von Prof. Dr. F. W. Neger in Tharandt. Mit 85 Abbildungen, 5 Tabellen und 3 Karten. Nr. 355.

Nutzpflanzen von Prof. Dr. J. Behrens, Vorst. der Großh. landwirtschaftl. Versuchsanst. Augustenberg. Mit 53 Figuren. Nr. 123.

Das System der Blütenpflanzen mit Ausschluß der Gymnospermen von Dr. R. Pilger, Assistent am Kgl. Botanischen Garten in Berlin-Dahlem. Mit 31 Figuren. Nr. 393.

Pflanzenkrankheiten von Dr. Werner Friedrich Bruck in Gießen. Mit 1 farb. Tafel und 45 Abbildungen. Nr. 310.

Mineralogie von Dr. R. Brauns, Professor an d. Universität Bonn. Mit 130 Abbildungen. Nr. 29.

Geologie in kurzem Auszug für Schulen und zur Selbstbelehrung zusammengestellt von Prof. Dr. Eberh. Fraas in Stuttgart. Mit 16 Abbildungen und 4 Tafeln mit 51 Figuren. Nr. 13.

Paläontologie von Dr. Rud. Hoernes, Professor an der Universität Graz. Mit 87 Abbildungen. Nr. 95.

Petrographie von Dr. W. Bruhns, Professor an der Universität Straßburg i. E. Mit 15 Abbildungen. Nr. 173.

Kristallographie von Dr. W. Bruhns, Prof. an der Universität Straßburg. Mit 190 Abbildungen. Nr. 210.

Geschichte der Physik von A. Kistner, Prof. an der Großh. Realschule zu Sinsheim a. E. I: Die Physik bis Newton. Mit 13 Figuren. Nr. 293.

— II: Die Physik von Newton bis zur Gegenwart. Mit 3 Figuren. Nr. 294.

Theoretische Physik. I. Teil: Mechanik und Akustik. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. der Physik an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 19 Abb. Nr. 76.

— II. Teil: Licht und Wärme. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. der Physik an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 47 Abbildungen. Nr. 77.

— III. Teil: Elektrizität und Magnetismus. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. der Physik an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 33 Abbild. Nr. 78.

— IV. Teil: Elektromagnetische Lichttheorie und Elektronik. Von Dr. Gustav Jäger, Prof. der Physik an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 21 Figuren. Nr. 374.

Radioaktivität von Wilh. Frommel. Mit 18 Figuren. Nr. 317.

Physikalische Messungsmethoden von Dr. Wilhelm Bahrdt, Oberlehrer an der Oberrealschule in Groß-Lichterfelde. Mit 49 Figuren. Nr. 301.

Geschichte der Chemie von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Kgl. Technischen Hochschule Stuttgart. I: Von den ältesten Zeiten bis zur Verbrennungstheorie von Lavoisier. Nr. 264.

— II: Von Lavoisier bis zur Gegenwart. Nr. 265.

Anorganische Chemie von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 37.

Metalloide (Anorganische Chemie I. Teil) von Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Kgl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 211.

Metalle (Anorganische Chemie II. Teil) von Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Kgl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 212.

Organische Chemie von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 38.

Chemie der Kohlenstoffverbindungen von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I. II: Aliphatische Verbindungen. 2 Teile. Nr. 191, 192.

— III: Karbocyklische Verbindungen. Nr. 193.

— IV: Heterocyklische Verbindungen. Nr. 194.

Analytische Chemie von Dr. Johannes Hoppe. I: Theorie und Gang der Analyse. Nr. 247.

— II: Reaktion der Metalloide und Metalle. Nr. 248.

Maßanalyse von Dr. Otto Röhm in Stuttgart. Mit 14 Fig. Nr. 221.
Technisch-Chemische Analyse von Dr. G. Lunge, Prof. an der Eidgen. Polytechn. Schule in Zürich. Mit 16 Abbildungen. Nr. 195.
Stereochemie v. Dr. E. Wedekind, Prof. a. d. Univ. Tübingen. Mit 34 Abb. Nr. 201.
Allgemeine und physikalische Chemie von Dr. Max Rudolphi, Professor an der Techn. Hochschule in Darmstadt. Mit 22 Figuren. Nr. 71.
Elektrochemie von Dr. Heinrich Danneel in Friedrichshagen. I. Teil: Theoretische Elektrochemie u ihre physikal.-chemischen Grundlagen. Mit 18 Fig. Nr. 252.
— II: Experimentelle Elektrochemie, Meßmethoden, Leitfähigkeit, Lösungen. Mit 26 Figuren. Nr. 253.
Toxikologische Chemie von Privatdozent Dr. E. Mannheim in Bonn. Mit 6 Abbildungen. Nr. 465.
Agrikulturchemie. I: **Pflanzenernährung** von Dr. Karl Grauer. Nr. 329.
Das agrikulturchemische Kontrollwesen v. Dr. Paul Krische in Göttingen. Nr. 304.
Physiologische Chemie von Dr. med. A. Legahn in Berlin. I: Assimilation. Mit 2 Tafeln. Nr. 240.
— II: Dissimilation. Mit einer Tafel. Nr. 241.
Meteorologie von Dr. W. Trabert, Prof. an der Universität Innsbruck. Mit 49 Abbildungen und 7 Tafeln. Nr. 54.
Erdmagnetismus, Erdstrom und Polarlicht von Dr. A. Nippoldt jr., Mitglied d. Kgl. Preuß. Meteorol. Instituts zu Potsdam. Mit 14 Abb. u. 3 Taf. Nr. 175.
Astronomie. Größe, Bewegung und Entfernung der Himmelskörper von A. F. Möbius, neu bearb. von Dr. W. F. Wislicenus, Prof. an der Univ. Straßburg. Mit 36 Abbildungen und 1 Sternkarte. Nr. 11.
Astrophysik. Die Beschaffenheit der Himmelskörper von Prof. Dr. Walter F. Wislicenus. Neu bearb. v. Dr. H. Ludendorff, Potsdam. Mit 15 Abb. Nr. 91.
Astronomische Geographie von Dr. Siegm. Günther, Prof. an der Techn. Hochschule in München. Mit 52 Abbildungen. Nr. 92.
Physische Geographie von Dr. Siegm. Günther, Prof. an der Königl. Techn. Hochschule in München. Mit 32 Abbildungen. Nr. 26.
Physische Meereskunde von Prof. Dr. Gerhard Schott, Abteilungsvorsteher an der Deutschen Seewarte in Hamburg. Mit 28 Abbildungen im Text und 8 Tafeln. Nr. 112.
Klimakunde I: Allgemeine Klimalehre von Prof. Dr. W. Köppen, Meteorologe der Seewarte Hamburg. Mit 7 Taf. u. 2 Fig. Nr. 114.

☛ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Bibliothek zur Physik.

Geschichte der Physik von A. Kistner, Professor an der Großh. Realschule zu Sinsheim a. E. I: Die Physik bis Newton. Mit 13 Fig. Nr. 293.
— II: Die Physik von Newton bis zur Gegenwart. Mit 13 Figuren. Nr. 294.
Theoretische Physik von Dr. Gustav Jäger, Prof. an der Technischen Hochschule in Wien. I: Mechanik und Akustik. Mit 19 Abbildungen. Nr. 76.
— II: Licht und Wärme. Mit 47 Abbildungen. Nr. 77.
— III: Elektrizität und Magnetismus. Mit 33 Abbildungen. Nr. 78.
— IV: Elektromagnetische Lichttheorie und Elektronik. Mit 21 Figuren. Nr. 374.
Radioaktivität von Wilh. Frommel. Mit 18 Figuren. Nr. 317.
Physikalische Messungsmethoden von Dr. Wilhelm Bahrdt, Oberlehrer an der Oberrealschule in Groß-Lichterfelde. Mit 49 Figuren. Nr. 301.

Physikalische Aufgabensammlung von G. Mahler, Professor am Gymnasium in Ulm. Mit den Resultaten. Nr. 243.

Physikalische Formelsammlung von G. Mahler, Professor am Gymnasium in Ulm. Nr. 136.

Physikalisch-Chemische Rechenaufgaben von Prof. Dr. R. Abegg und Privatdozent Dr. O. Sackur, beide an der Universität Breslau. Nr. 445.

Vektoranalysis von Dr. Siegfr. Valentiner, Privatdozent für Physik an der Universität Berlin. Mit 11 Figuren. Nr. 354.

☛ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Bibliothek zur Chemie.

Geschichte der Chemie von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Kgl. Technischen Hochschule Stuttgart. I: Von den ältesten Zeiten bis zur Verbrennungstheorie von Lavoisier. Nr. 264.

— II: Von Lavoisier bis zur Gegenwart. Nr. 265.

Anorganische Chemie von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 37.

Metalloide (Anorganische Chemie I) von Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Kgl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 211.

Metalle (Anorganische Chemie II) von Dr. Oskar Schmidt, dipl. Ingenieur, Assistent an der Kgl. Baugewerkschule in Stuttgart. Nr. 212.

Organische Chemie von Dr. Jos. Klein in Mannheim. Nr. 38.

Chemie der Kohlenstoffverbindungen von Dr. Hugo Bauer, Assistent am chem. Laboratorium der Kgl. Techn. Hochschule Stuttgart. I, II: Aliphatische Verbindungen. 2 Teile. Nr. 191, 192.

— III: Karbocyklische Verbindungen. Nr. 193.

— IV: Heterocyklische Verbindungen. Nr. 194.

Analytische Chemie von Dr. Joh. Hoppe. I: Theorie u. Gang d. Analyse. Nr. 247.

— II: Reaktion der Metalloide und Metalle. Nr. 248.

Maßanalyse von Dr. Otto Röhm in Stuttgart. Mit 14 Fig. Nr. 221.

Technisch-Chemische Analyse von Dr. G. Lunge, Professor an der Eidgenöss. Polytechn. Schule in Zürich. Mit 16 Abbildungen. Nr. 195.

Stereochemie von Dr. E. Wedekind, Professor an der Universität Tübingen. Mit 34 Abbildungen. Nr. 201.

Allgemeine und physikalische Chemie von Dr. Max Rudolphi, Professor an der Technischen Hochschule in Darmstadt. Mit 22 Fig. Nr. 71.

Elektrochemie von Dr. Heinrich Danneel in Friedrichshagen. I. Teil: Theoretische Elektrochemie u. ihre physikalisch-chemischen Grundlagen. Mit 18 Fig. Nr. 252.

— II: Experimentelle Elektrochemie, Meßmethoden, Leitfähigkeit, Lösungen. Mit 26 Figuren. Nr. 253.

Toxikologische Chemie von Privatdozent Dr. E. Mannheim in Bonn. Mit 6 Abbildungen. Nr. 465.

Agrikulturchemie I: Pflanzenernährung von Dr. Karl Grauer. Nr. 329.

Agrikulturchemische Untersuchungsmethoden von Prof. Dr. Emil Haselhoff, Vorsteher der landwirtschaftl. Versuchsstation in Marburg i. H. Nr. 470.

Das agrikulturchemische Kontrollwesen v. Dr. Paul Krische in Göttingen. Nr. 304.

Physiologische Chemie von Dr. med. A. Legahn in Berlin. I: Assimilation. Mit 2 Tafeln. Nr. 240.

— II: Dissimilation. Mit 1 Tafel. Nr. 241.

Stöchiometrische Aufgabensammlung von Dr. Wilhelm Bahrdt, Oberlehrer an der Oberrealschule in Groß-Lichterfelde. Mit den Resultaten. Nr. 452.

Physikalisch-Chemische Rechenaufgaben von Prof. Dr. R. Abegg und Privatdozent Dr. O. Sackur, beide an der Universität Breslau. Nr. 445.

☛ Siehe auch „Technologie“. Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Bibliothek zur Technologie.

Chemische Technologie.

Allgemeine chemische Technologie v. Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. Nr. 113.

Die Fette und Öle sowie die Seifen- und Kerzenfabrikation und die Harze, Lacke, Firnisse mit ihren wichtigsten Hilfsstoffen von Dr. Karl Braun. I: Einführung i. d. Chemie, Besprechung einig. Salze u. d. Fette u. Öle. Nr. 335.

— II: Die Seifenfabrikation, die Seifenanalyse und die Kerzenfabrikation. Mit 25 Abbildungen. Nr. 336.

— III: Harze, Lacke, Firnisse. Nr. 337.

Ätherische Öle und Riechstoffe von Dr. F. Rochussen in Miltitz. Mit 9 Abbildungen. Nr. 446.

Die Explosivstoffe. Einführung in die Chemie der explosiven Vorgänge von Dr. H. Brunswig in Neubabelsberg. Mit 16 Abbildungen. Nr. 333.

Brauereiwesen I: Mälzerei von Dr. Paul Dreverhoff, Direktor der Brauer- und Mälzerschule in Grimma. Mit 16 Abbildungen. Nr. 303.

Das Wasser und seine Verwendung in Industrie und Gewerbe von Dipl.-Ing. Dr. Ernst Leher. Mit 15 Abbildungen. Nr. 261.

Wasser und Abwässer. Ihre Zusammensetzung, Beurteilung und Untersuchung von Prof. Dr. Emil Haselhoff, Vorsteher der landwirtschaftlichen Versuchsstation in Marburg in Hessen. Nr. 473.

Anorganische chemische Industrie von Dr. Gust. Rauter in Charlottenburg. I: Die Leblancsodaindustrie und ihre Nebenzweige. Mit 12 Tafeln. Nr. 205.

— II: Salinenwesen, Kalisalze, Düngerindustrie und Verwandtes. Mit 6 Tafeln. Nr. 206.

— III: Anorganische Chemische Präparate. Mit 6 Tafeln. Nr. 207.

Metallurgie von Dr. Aug. Geitz in München. 2 Bde. Mit 21 Fig. Nr. 313, 314.

Die Industrie der Silikate, der künstlichen Bausteine und des Mörtels von Dr. Gustav Rauter. I: Glas- und keramische Industrie. Mit 12 Taf. Nr. 233.

— II: Die Industrie der künstlichen Bausteine und des Mörtels. Mit 12 Taf. Nr. 234.

Die Teerfarbstoffe mit besonderer Berücksichtigung der synthetischen Methoden von Dr. Hans Bucherer, Prof. a. d. Kgl. Techn. Hochschule Dresden. Nr. 214.

Mechanische Technologie.

Mechanische Technologie von Geh. Hofrat Prof. A. Lüdicke in Braunschweig. Nr. 340, 341.

Textil-Industrie I: Spinnerei und Zwirnerei von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 39 Fig. Nr. 184.

— **II:** Weberei, Wirkerei, Posamentiererei, Spitzen- und Gardinenfabrikation und Filzfabrikation von Prof. Max Gürtler, Geh. Regierungsrat im Königl. Landesgewerbeamt zu Berlin. Mit 27 Figuren. Nr. 185.

Textil-Industrie III: Wäscherei, Bleicherei, Färberei und ihre Hilfsstoffe von Dr. Wilh. Massot, Lehrer an der Preuß. höh. Fachschule für Textil-Industrie in Krefeld. Mit 28 Figuren. Nr. 186.

Die Materialien des Maschinenbaues und der Elektrotechnik von Ingenieur Prof. Herm. Wilda in Bremen. Mit 3 Abbildungen. Nr. 476.

Das Holz. Aufbau, Eigenschaften und Verwendung, von Prof. Herm. Wilda in Bremen. Mit 33 Abbildungen. Nr. 459.

☛ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Bibliothek zu den Ingenieurwissenschaften.

Das Rechnen in der Technik u. seine Hilfsmittel (Rechenschieber, Rechentafeln, Rechenmaschinen usw.) von Ingenieur Joh. Eugen Mayer in Karlsruhe i. B. Mit 30 Abb. Nr. 405.

Materialprüfungswesen. Einführung in die moderne Technik der Materialprüfung von K. Memmler, Diplom-Ingenieur, ständ. Mitarbeiter am Kgl. Materialprüfungsamte zu Groß-Lichterfelde. I: Materialeigenschaften. — Festigkeitsversuche. — Hilfsmittel für Festigkeitsversuche. Mit 58 Figuren. Nr. 311.

— II: Metallprüfung und Prüfung von Hilfsmaterialien des Maschinenbaues. — Baumaterialprüfung. — Papierprüfung. — Schmiermittelprüfung. — Einiges über Metallographie. Mit 31 Figuren. Nr. 312.

Metallographie. Kurze, gemeinfaßliche Darstellung der Lehre von den Metallen und ihren Legierungen, unter besonderer Berücksichtigung der Metallmikroskopie von Prof. E. Heyn und Prof. O. Bauer am Kgl. Materialprüfungsamt (Groß-Lichterfelde) der Kgl. Technischen Hochschule zu Berlin. I: Allgemeiner Teil. Mit 45 Abbildungen im Text und 5 Lichtbildern auf 3 Tafeln. Nr. 432.

— II: Spezieller Teil. Mit 49 Abbildungen im Text und 37 Lichtbildern auf 19 Tafeln. Nr. 433.

Statik. I: Die Grundlehren der Statik starrer Körper von W. Hauber, Diplom-Ingenieur. Mit 82 Figuren. Nr. 178.

— II: Angewandte Statik. Mit 61 Figuren. Nr. 179.

Festigkeitslehre von W. Hauber, Diplom-Ingenieur. Mit 56 Figuren. Nr. 288.

Hydraulik v. W. Hauber, Diplom-Ingenieur in Stuttgart. Mit 44 Fig. Nr. 397.

Geometrisches Zeichnen von H. Becker, Architekt und Lehrer an der Baugewerkschule in Magdeburg, neubearbeitet von Professor J. Vonderlinn in Münster. Mit 290 Figuren und 23 Tafeln im Text. Nr. 58.

Schattenkonstruktionen von Prof. J. Vonderlinn in Münster. Mit 114 Fig. Nr. 236.

Parallelperspektive. Rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie von Prof. J. Vonderlinn in Münster. Mit 121 Figuren. Nr. 260.

Zentral-Perspektive von Architekt Hans Freyberger, neu bearbeitet von Prof. J. Vonderlinn, Dir. d. Kgl. Baugewerkschule, Münster i. W. Mit 132 Fig. Nr. 57.

Technisches Wörterbuch, enthaltend die wichtigsten Ausdrücke des Maschinenbaues, Schiffbaues und der Elektrotechnik von Erich Krebs in Berlin.
I. Teil: Deutsch-Englisch. Nr. 395.
— II. Teil: Englisch-Deutsch. Nr. 396.
— III. Teil: Deutsch-Französisch. Nr. 453.

Elektrotechnik. Einführung in die moderne Gleich- und Wechselstromtechnik von J. Herrmann, Professor an der Königlich Technischen Hochschule Stuttgart. I: Die physikalischen Grundlagen. Mit 42 Fig. u. 10 Tafeln. Nr. 196.

— II: Die Gleichstromtechnik. Mit 103 Figuren und 16 Tafeln. Nr. 197.

Elektrotechnik. III: Die Wechselstromtechnik. Mit 126 Fig. u. 16 Taf. Nr. 198.

Die Gleichstrommaschine von C. Kinzbrunner, Ingenieur u. Dozent für Elektrotechnik a. d. Municipal School of Technology in Manchester. Mit 78 Fig. Nr. 257.

Ströme und Spannungen in Starkstromnetzen von Diplom-Elektroingenieur Josef Herzog in Budapest u. Prof. Feldmann in Delft. Mit 68 Fig. Nr. 456.

Das Fernsprechwesen v. Dr. Ludw. Rellstab in Berlin. Mit 47 Fig. u. 1 Taf. Nr. 155.

Die elektrische Telegraphie von Dr. Ludwig Rellstab. Mit 19 Figuren. Nr. 172.

Maurer- u. Steinhauerarbeiten von Prof. Dr. phil. u. Dr.-Ing. Eduard Schmitt in Darmstadt. 3 Bändchen. Mit vielen Abbildungen. Nr. 419—421.

Eisenkonstruktionen im Hochbau. Kurzgefaßtes Handbuch mit Beispielen von Ingenieur Karl Schindler in Meißen. Mit 115 Figuren. Nr. 322.

Vermessungskunde von Dipl.-Ing. Oberlehrer P. Werkmeister. 2 Bändchen. Mit 255 Abbildungen. Nr. 468, 469.

Der Eisenbetonbau von Reg.-Baumeister Karl Rößle in Berlin-Steglitz. Mit 77 Abbildungen. Nr. 349.

Heizung und Lüftung von Ingenieur Johannes Körting, Direktor der Akt.-Ges. Gebrüder Körting in Düsseldorf. I: Das Wesen und die Berechnung der Heizungs- und Lüftungsanlagen. Mit 34 Figuren. Nr. 342.

— II: Die Ausführung der Heizungs- und Lüftungsanlagen. Mit 191 Fig. Nr. 343.

Gas- und Wasserinstallationen mit Einschluß der Abortanlagen von Professor Dr. phil. u. Dr.-Ing. Eduard Schmitt in Darmstadt. Mit 119 Abbild. Nr. 412.

Das Veranschlagen im Hochbau. Kurzgefaßtes Handbuch über das Wesen des Kostenanschlages von Emil Beutinger, Architekt B.D.A., Assistent an der Technischen Hochschule in Darmstadt. Mit vielen Figuren. Nr. 385.

Bauführung. Kurzgefaßtes Handbuch über das Wesen der Bauführung von Architekt Emil Beutinger, Assistent an der Technischen Hochschule in Darmstadt. Mit 25 Figuren und 11 Tabellen. Nr. 399.

Die Baukunst des Schulhauses von Prof. Dr.-Ing. Ernst Vetterlein in Darmstadt. I: Das Schulhaus. Mit 38 Abbildungen. Nr. 443.

— II: Die Schulräume. — Die Nebenanlagen. Mit 31 Abbildungen. Nr. 444.

Öffentliche Bade- und Schwimmanstalten von Dr. Karl Wolff, Stadt-Oberbaurat in Hannover. Mit 50 Fig. Nr. 380.

Die Maschinenelemente. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium und den praktischen Gebrauch von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. Mit 86 Figuren. Nr. 3.

Eisenhüttenkunde von A. Krauß, diplomierter Hütteningenieur. I: Das Roheisen. Mit 17 Figuren und 4 Tafeln. Nr. 152.

— II: Das Schmiedeeisen. Mit 25 Figuren und 5 Tafeln. Nr. 153.

Technische Wärmelehre (Thermodynamik) von K. Walther und M. Röttinger, Diplom-Ingenieuren. Mit 54 Figuren. Nr. 242.

Die Dampfmaschine. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium u. d. prakt. Gebrauch v. Friedr. Barth, Obering., Nürnberg. Mit 48 Fig. Nr. 8.

Die Dampfkessel. Kurzgefaßtes Lehrbuch mit Beispielen für das Selbststudium u. den prakt. Gebrauch v. Friedr. Barth, Obering., Nürnberg. Mit 67 Fig. Nr. 9.

Die Gaskraftmaschinen. Kurzgefaßte Darstellung der wichtigsten Gasmaschinen-Bauarten v. Ingenieur Alfred Kirschke in Halle a. S. Mit 55 Figuren. Nr. 316.

Die Dampfturbinen, ihre Wirkungsweise und Konstruktion von Ing. Hermann Wilda, Professor am staatl. Technikum in Bremen. Mit 104 Abb. Nr. 274.

Die zweckmäßigste Betriebskraft von Friedrich Barth, Oberingenieur in Nürnberg. I: Einleitung. Dampfkraftanlagen. Verschiedene Kraftmaschinen. Mit 27 Abbildungen. Nr. 224.

— II: Gas-, Wasser- und Wind-Kraftanlagen. Mit 31 Abbildungen. Nr. 225.

— III: Elektromotoren. Betriebskostentabellen. Graphische Darstellungen. Wahl der Betriebskraft. Mit 27 Abbildungen. Nr. 474.

Die Hebezeuge, ihre Konstruktion und Berechnung von Ingenieur Hermann Wilda, Prof. am staatl. Technikum in Bremen. Mit 399 Abbildungen. Nr. 414.

Pumpen, hydraulische und pneumatische Anlagen. Ein kurzer Überblick von Regierungsbaumeister Rudolf Vogdt, Oberlehrer an der Königl. höheren Maschinenbauschule in Posen. Mit 59 Abbildungen. Nr. 290.

Die landwirtschaftlichen Maschinen von Karl Walther, Diplom-Ingenieur in Mannheim. 3 Bändchen. Mit vielen Abbildungen. Nr. 407—409.

Nautik. Kurzer Abriß des täglich an Bord von Handelsschiffen angewandten Teils der Schiffahrtskunde. Von Dr. Franz Schulze, Direktor der Navigationsschule zu Lübeck. Mit 56 Abbildungen. Nr. 84.

☛ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Bibliothek zu den Rechts- u. Staatswissenschaften.

Allgemeine Rechtslehre von Dr. Th. Sternberg, Privatdozent an der Univers. Lausanne. I: Die Methode. Nr. 169.

— II: Das System. Nr. 170.

Recht des Bürgerlichen Gesetzbuches. Erstes Buch: Allgemeiner Teil. I: Einleitung — Lehre von den Personen und von den Sachen von Dr. Paul Oertmann, Professor an der Universität Erlangen. Nr. 447.

— II: Erwerb und Verlust, Geltendmachung und Schutz der Rechte von Dr. Paul Oertmann, Professor an der Universität Erlangen Nr. 448.

— Zweites Buch: Schuldrecht. I. Abteilung: Allgemeine Lehren von Dr. Paul Oertmann, Professor an der Universität Erlangen. Nr. 323.

— II. Abteilung: Die einzelnen Schuldverhältnisse von Dr. Paul Oertmann, Professor an der Universität Erlangen. Nr. 324.

— Viertes Buch: Familienrecht von Dr. Heinrich Titze, Professor an der Univ. Göttingen. Nr. 305.

Deutsches Zivilprozeßrecht von Professor Dr. Wilhelm Kisch in Straßburg i. E. 3 Bände. Nr. 428—430.

Deutsches Handelsrecht von Prof. Dr. Karl Lehmann in Rostock. 2 Bändchen. Nr. 457, 458.

Das deutsche Seerecht von Dr. Otto Brandis, Oberlandesgerichtsrat in Hamburg. 2 Bände. Nr. 386, 387.

Postrecht von Dr. Alfred Wolcke, Postinspektor in Bonn. Nr. 425.

Allgemeine Staatslehre von Dr. Hermann Rehm, Prof. an der Universität Straßburg i. E. Nr. 358.

Allgemeines Staatsrecht von Dr. Julius Hatschek, Prof. der Rechte an der Kgl. Akademie in Posen. 3 Bändchen. Nr. 415—417.

Preußisches Staatsrecht von Dr. Fritz Stier-Somlo, Prof. an der Univers. Bonn. 2 Teile. Nr. 298, 299.

Kirchenrecht von Dr. Emil Sehling, ord. Prof. der Rechte in Erlangen. Nr. 377.

Das deutsche Urheberrecht an literarischen, künstlerischen und gewerblichen Schöpfungen, mit besonderer Berücksichtigung der internationalen Verträge von Dr. Gustav Rauter, Patentanwalt in Charlottenburg. Nr. 263.

Der internationale gewerbliche Rechtsschutz von J. Neuberg, Kaiserl. Regierungsrat, Mitglied des Kaiserl. Patentamts zu Berlin. Nr. 271.

Das Urheberrecht an Werken der Literatur und der Tonkunst, das Verlagsrecht und das Urheberrecht an Werken der bildenden Künste und der Photographie von Staatsanwalt Dr. J. Schlittgen in Chemnitz. Nr. 361.

Das Warenzeichenrecht. Nach dem Gesetz zum Schutz der Warenbezeichnungen vom 12. Mai 1894 von J. Neuberg, Kaiserl. Regierungsrat, Mitglied des Kaiserl. Patentamtes zu Berlin. Nr. 360.

Der unlautere Wettbewerb von Rechtsanwalt Dr. Martin Wassermann in Hamburg. Nr. 339.

Deutsches Kolonialrecht von Dr. H. Edler v. Hoffmann, Professor an der Kgl. Akademie Posen. Nr. 318.

Militärstrafrecht von Dr. Max Ernst Mayer, Prof. an der Universität Straßburg i. E. 2 Bände. Nr. 371, 372.

Deutsche Wehrverfassung von Kriegsgerichtsrat Carl Endres i. Würzburg. Nr. 401.

Forensische Psychiatrie von Prof. Dr. W. Weygandt, Direktor der Irrenanstalt Friedrichsberg in Hamburg. 2 Bändchen. Nr. 410 u. 411.

☞ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Volkswirtschaftliche Bibliothek.

Volkswirtschaftslehre von Dr. Carl Johs. Fuchs, Professor an der Universität Tübingen. Nr. 133.

Volkswirtschaftspolitik von Präsident Dr. R. van der Borght in Berlin. Nr. 177.

Gewerbewesen von Dr. Werner Sombart, Professor an der Handelshochschule Berlin. 2 Bände. Nr. 203, 204.

Das Genossenschaftswesen in Deutschland. Von Dr. Otto Lindecke, Sekretär des Hauptverbandes deutscher gewerblicher Genossenschaften. Nr. 384.

Das Handelswesen von Dr. Wilh. Lexis, Professor an der Universität Göttingen. I: Das Handelspersonal und der Warenhandel. Nr. 296.

— II. Die Effektenbörse und die innere Handelspolitik. Nr. 297.

Auswärtige Handelspolitik von Dr. Heinrich Sieveking, Professor an der Universität Zürich. Nr. 245.

Das Versicherungswesen von Dr. jur. Paul Moldenhauer, Dozent der Versicherungswissenschaft an der Handelshochschule Köln. Nr. 262.

Die gewerbliche Arbeiterfrage von Dr. Werner Sombart, Professor an der Handelshochschule Berlin. Nr. 209.

Die Arbeiterversicherung von Professor Dr. Alfred Manes in Berlin. Nr. 267.

Finanzwissenschaft von Präsident Dr. R. van der Borght in Berlin. I. Allgemeiner Teil. Nr. 148.

— II. Besonderer Teil (Steuerlehre). Nr. 391.

Die Steuersysteme des Auslandes von Geh. Oberfinanzrat O. Schwarz in Berlin. Nr. 426.

Die Entwicklung der Reichsfinanzen von Präsident Dr. R. van der Borght in Berlin. Nr. 427.

Die Finanzsysteme der Großmächte. (Internat. Staats- u. Gemeinde-Finanzwesen.) Von O. Schwarz, Geh. Oberfinanzrat, Berlin. 2 Bdch. Nr. 450, 451.

Soziologie von Prof. Dr. Thomas Achelis in Bremen. Nr. 101.

Die Entwicklung der sozialen Frage von Prof. Dr. Ferd. Tönnies in Eutin. Nr. 353.

Armenwesen und Armenfürsorge. Einführung in die soziale Hilfsarbeit von Dr. Adolf Weber, Professor an der Handelshochschule in Köln. Nr. 346.

☛ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Theologische und religionswissenschaftliche Bibliothek.

Die Entstehung des Alten Testaments von Lic. Dr. W. Staerk, Professor an der Universität in Jena. Nr. 272.

Alttestamentliche Religionsgeschichte von D. Dr. Max Löhr, Professor an der Universität Breslau. Nr. 292.

Geschichte Israels bis auf die griechische Zeit von Lic. Dr. J. Benzinger. Nr. 231.

Landes- u. Volkskunde Palästinas von Lic. Dr. Gustav Hölscher in Halle. Mit 8 Vollbildern und 1 Karte. Nr. 345.

Die Entstehung d. Neuen Testaments v. Prf. Lic. Dr. Carl Clemen in Bonn. Nr. 285.

Die Entwicklung der christlichen Religion innerhalb des Neuen Testaments von Prof. Lic. Dr. Carl Clemen in Bonn. Nr. 388.

Neutestamentliche Zeitgeschichte von Lic. Dr. W. Staerk, Professor an der Universität in Jena. I: Der historische u. kulturgeschichtliche Hintergrund des Urchristentums. Nr. 325.

— II: Die Religion des Judentums im Zeitalter des Hellenismus und der Römerherrschaft. Nr. 326.

Die Entstehung des Talmuds von Dr. S. Funk in Boskowitz. Nr. 479.

Abriß der vergleichenden Religionswissenschaft von Prof. Dr. Th. Achelis in Bremen. Nr. 208.

Die Religionen der Naturvölker im Umriß von Dr. Th. Achelis, weiland Professor in Bremen. Nr. 449.

Indische Religionsgeschichte von Prof. Dr. Edmund Hardy. Nr. 83.

Buddha von Professor Dr. Edmund Hardy. Nr. 174.

Griechische und römische Mythologie von Dr. Hermann Steuding, Rektor des Gymnasiums in Schneeberg. Nr. 27.

Germanische Mythologie von Dr. E. Mogk, Prof. an der Univ. Leipzig. Nr. 15.

Die deutsche Heldensage von Dr. Otto Luitpold Jiriczek, Professor an der Universität Münster. Nr. 32.

☛ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Pädagogische Bibliothek.

Pädagogik im Grundriß von Professor Dr. W. Rein, Direktor des Pädagogischen Seminars an der Universität in Jena. Nr. 12.

Geschichte der Pädagogik von Oberlehrer Dr. H. Weimer in Wiesbaden. Nr. 145.

Schulpraxis. Methodik der Volksschule von Dr. R. Seyfert, Seminardirektor in Zschopau. Nr. 50.

Zeichenschule von Professor K. Kimmich in Ulm. Mit 18 Tafeln in Ton-, Farben- u. Golddruck u. 200 Voll- u. Textbildern. Nr. 39.

Bewegungsspiele von Dr. E. Kohlrausch, Prof. am Kgl. Kaiser Wilhelms-Gymnasium zu Hannover. Mit 14 Abbildungen. Nr. 96.

Das öffentliche Unterrichtswesen Deutschlands in der Gegenwart von Dr. Paul Stötzner, Gymnasialoberlehrer in Zwickau. Nr. 130.

Geschichte des deutschen Unterrichtswesens von Professor Dr. Friedrich Seiler, Direktor des Königlichen Gymnasiums zu Luckau. I: Von Anfang an bis zum Ende des 18. Jahrhunderts. Nr. 275.

— II: Vom Beginn des 19. Jahrhunderts bis auf die Gegenwart. Nr. 276.

Das deutsche Fortbildungsschulwesen nach seiner geschichtlichen Entwicklung und in seiner gegenwärtigen Gestalt von H. Siercks, Direktor der städt. Fortbildungsschulen in Heide i. Holstein. Nr. 392.

Die deutsche Schule im Auslande von Hans Amrhein, Direktor der deutschen Schule in Lüttich. Nr. 259.

☛ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Bibliothek zur Kunst.

Stilkunde von Prof. Karl Otto Hartmann in Stuttgart. Mit 7 Vollbildern und 195 Textillustrationen. Nr. 80.

Die Baukunst des Abendlandes von Dr. K. Schäfer, Assistent am Gewerbemuseum in Bremen. Mit 22 Abbildungen. Nr. 74.

Die Plastik des Abendlandes von Dr. Hans Stegmann, Direktor des Bayr. Nationalmuseums in München. Mit 23 Tafeln. Nr. 116.

Die Plastik seit Beginn des 19. Jahrhunderts von A. Heilmeyer in München. Mit 41 Vollbildern auf amerikanischem Kunstdruckpapier. Nr. 321.

Die graphischen Künste v. Carl Kampmann, k. k. Lehrer an der k. k. Graphischen Lehr- u. Versuchsanstalt in Wien. Mit zahlreichen Abbild. u. Beilagen. Nr.75.

Die Photographie von H. Keßler, Prof. an der k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit 4 Tafeln und 52 Abbildungen. Nr. 94.

☛ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Bibliothek zur Musik.

Allgemeine Musiklehre von Stephan Krehl in Leipzig. Nr. 220.

Musikalische Akustik von Dr. Karl L. Schäfer, Dozent an der Universität Berlin. Mit 35 Abbildungen. Nr. 21.

Harmonielehre von A. Halm. Mit vielen Notenbeilagen. Nr. 120.

Musikalische Formenlehre (Kompositionslehre) von Stephan Krehl. I. II. Mit vielen Notenbeispielen. Nr. 149, 150.

Kontrapunkt. Die Lehre von der selbständigen Stimmführung von Stephan Krehl in Leipzig. Nr. 390.

Fuge. Erläuterung und Anleitung zur Komposition derselben von Stephan Krehl in Leipzig. Nr. 418.

Instrumentenlehre von Musikdirektor Franz Mayerhoff in Chemnitz. I: Text. II: Notenbeispiele. Nr. 437, 438.

Musikästhetik von Dr. K. Grunsky in Stuttgart. Nr. 344.

Geschichte der alten und mittelalterlichen Musik von Dr. A. Möhler. Mit zahlreichen Abbildungen und Musikbeilagen. I. II. Nr. 121, 347.

Musikgeschichte des 17. u. 18. Jahrhunderts v. Dr. K. Grunsky i. Stuttgart. Nr. 239.
— des 19. Jahrhunderts von Dr. K. Grunsky in Stuttgart. I. II. Nr. 164, 165.

☞ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Bibliothek zur Land- und Forstwirtschaft.

Bodenkunde von Dr. P. Vageler in Königsberg i. Pr. Nr. 455.
Ackerbau- und Pflanzenbaulehre von Dr. Paul Rippert in Berlin und Ernst Langenbeck in Bochum. Nr. 232.
Landwirtschaftliche Betriebslehre von Ernst Langenbeck in Bochum. Nr. 227.
Allgemeine und spezielle Tierzuchtlehre von Dr. Paul Rippert in Berlin. Nr. 228.
Agrikulturchemie I: Pflanzenernährung von Dr. Karl Grauer. Nr. 329.
Das agrikulturchemische Kontrollwesen v. Dr. Paul Krische in Göttingen. Nr. 304.
Fischerei und Fischzucht von Dr. Karl Eckstein, Prof. an der Forstakademie Eberswalde, Abteilungsdirigent bei der Hauptstation des forstlichen Versuchswesens. Nr. 159.
Forstwissenschaft von Dr. Ad. Schwappach, Prof. an der Forstakadem. Eberswalde, Abteilungsdirigent bei der Hauptstation d. forstlichen Versuchswesens. Nr. 106.
Die Nadelhölzer von Prof. Dr. F. W. Neger in Tharandt. Mit 85 Abbildungen, 5 Tabellen und 3 Karten. Nr. 355.

☞ Weitere Bände sind in Vorbereitung.

Handelswissenschaftliche Bibliothek.

Buchführung in einfachen und doppelten Posten von Prof. Robert Stern, Oberlehrer der Öffentlichen Handelslehranstalt und Dozent der Handelshochschule zu Leipzig. Mit Formularen. Nr. 115.
Deutsche Handelskorrespondenz von Prof. Th. de Beaux, Officier de l'Instruction Publique, Oberlehrer a. D. an der Öffentlichen Handelslehranstalt und Lektor an der Handelshochschule zu Leipzig. Nr. 182.
Französische Handelskorrespondenz von Professor Th. de Beaux, Officier de l'Instruction Publique, Oberlehrer a. D. an der Öffentlichen Handelslehranstalt und Lektor an der Handelshochschule zu Leipzig. Nr. 183.
Englische Handelskorrespondenz von E. E. Whitfield, M.-A., Oberlehrer am King Edward VII Grammar School in Kings Lynn. Nr. 237.
Italienische Handelskorrespondenz von Professor Alberto de Beaux, Oberlehrer am Königlichen Institut SS. Annunziata zu Florenz. Nr. 219.
Spanische Handelskorrespondenz v. Dr. Alfredo Nadal de Mariezcurrena. Nr. 295.
Russische Handelskorrespondenz von Dr. Th. v. Kawraysky in Leipzig. Nr. 315.
Kaufmännisches Rechnen von Prof. Richard Just, Oberlehrer an d. Öffentlichen Handelslehranstalt der Dresdener Kaufmannschaft. 3 Bde. Nr. 139, 140, 187.
Warenkunde von Dr. Karl Hassack, Professor an der Wiener Handelsakademie. I: Unorganische Waren. Mit 40 Abbildungen. Nr. 222.
— II: Organische Waren. Mit 36 Abbildungen. Nr. 223.
Drogenkunde von Rich. Dorstewitz in Leipzig und Georg Ottersbach in Hamburg. Nr. 413.

Maß-, Münz- und Gewichtswesen von Dr. Aug. Blind, Professor an der Handelsschule in Köln. Nr. 283.

Das Wechselwesen von Rechtsanwalt Dr. Rudolf Mothes in Leipzig. Nr. 103.

☞ Weitere Bände sind in Vorbereitung. Siehe auch „Volkswirtschaftliche Bibliothek". Ein ausführliches Verzeichnis der außerdem im Verlage der G. J. Göschen'schen Verlagshandlung erschienenen handelswissenschaftlichen Werke kann durch jede Buchhandlung kostenfrei bezogen werden.

Militär- und marinewissenschaftliche Bibliothek.

Das moderne Feldgeschütz. I: Die Entwicklung des Feldgeschützes seit Einführung des gezogenen Infanteriegewehrs bis einschließlich der Erfindung des rauchlosen Pulvers, etwa 1850—1890, v. Oberstleutnant W. Heydenreich, Militärlehrer an der Militärtechn. Akademie in Berlin. Mit 1 Abbild. Nr. 306.

— II: Die Entwicklung des heutigen Feldgeschützes auf Grund der Erfindung des rauchlosen Pulvers, etwa 1890 bis zur Gegenwart, von Oberstleutnant W. Heydenreich, Militärlehrer an der Militärtechn. Akademie in Berlin. Mit 11 Abbildungen. Nr. 307.

Die modernen Geschütze der Fußartillerie. I: Vom Auftreten der gezogenen Geschütze bis zur Verwendung des rauchschwachen Pulvers 1850—1890 von Mummenhoff, Major beim Stabe des Fußartillerie-Regiments, Generalfeldzeugmeister (Brandenburgisches Nr. 3). Mit 50 Textbildern. Nr. 334.

— II: Die Entwicklung der heutigen Geschütze der Fußartillerie seit Einführung des rauchschwachen Pulvers 1890 bis zur Gegenwart. Mit 33 Textbildern. Nr. 362.

Die Entwicklung der Handfeuerwaffen seit der Mitte des 19. Jahrhunderts und ihr heutiger Stand von G. Wrzodek, Oberleutnant im Inf.-Regt. Freiherr Hiller von Gärtringen (4. Posensches) Nr. 59 und Assistent der Königl. Gewehrprüfungskommission. Mit 21 Abbildungen. Nr. 366.

Die Entwicklung des Kriegsschiffbaues vom Altertum bis zur Neuzeit. I. Teil: Das Zeitalter der Ruderschiffe und der Segelschiffe für die Kriegsführung zur See vom Altertum bis 1840. Von Tjard Schwarz, Geh. Marinebaurat u. Schiffbau-Direktor. Mit 32 Abbildungen. Nr. 471.

Militärstrafrecht von Dr. Max Ernst Mayer, Prof. an der Universität Straßburg i. E. 2 Bände. Nr. 371, 372.

Deutsche Wehrverfassung von Karl Endres, Kriegsgerichtsrat bei dem Generalkommando des Kgl. bayr. II. Armeekorps in Würzburg. Nr. 401.

Die Seemacht in der deutschen Geschichte von Wirkl. Admiralitätsrat Dr. Ernst von Halle, Prof. an der Universität Berlin. Nr. 370.

Verschiedenes.

Bibliotheks- und Zeitungswesen.

Volksbibliotheken (Bücher- und Lesehallen), ihre Einrichtung und Verwaltung von Emil Jaeschke, Stadtbibliothekar in Elberfeld. Nr. 332.

Das deutsche Zeitungswesen v. Dr. Robert Brunhuber in Köln a. Rh. Nr. 400.

Das moderne Zeitungswesen (System der Zeitungslehre) von Dr. Robert Brunhuber in Köln a. Rh. Nr. 320.

Allgemeine Geschichte des Zeitungswesens von Dr. Ludwig Salomon in Jena. Nr. 351.

Hygiene, Medizin und Pharmazie.

Ernährung und Nahrungsmittel von Oberstabsarzt Prof. Dr. Bischoff in Berlin. Mit 4 Figuren. Nr. 464.

Bewegungsspiele von Dr. E. Kohlrausch, Prof. am Kgl. Kaiser Wilhelms-Gymnasium zu Hannover. Mit 15 Abbildungen. Nr. 96.

Der menschliche Körper, sein Bau und seine Tätigkeiten, von E. Rebmann, Oberschulrat in Karlsruhe. Mit Gesundheitslehre von Dr. med. H. Seiler. Mit 47 Abbildungen und 1 Tafel. Nr. 18.

Die Infektionskrankheiten und ihre Verhütung von Stabsarzt Dr. W. Hoffmann in Berlin. Mit 12 vom Verfasser gezeichneten Abbildungen und einer Fiebertafel. Nr. 327.

Tropenhygiene von Med.-Rat Prof. Dr. Nocht, Direktor des Institutes für Schiffs- u. Tropenkrankheiten in Hamburg. Nr. 369.

Die Hygiene des Städtebaus von H. Chr. Nußbaum, Prof. an der Techn. Hochschule in Hannover. Mit 30 Abbildungen. Nr. 348.

Die Hygiene des Wohnungswesens von H. Chr. Nußbaum, Prof. an der Techn. Hochschule in Hannover. Mit 20 Abbildungen. Nr. 363.

Gewerbehygiene von Geh. Medizinalrat Dr. Roth in Potsdam. Nr. 350.

Pharmakognosie. Von Apotheker F. Schmitthenner, Assistent am Botan. Institut der Technischen Hochschule Karlsruhe. Nr. 251.

Drogenkunde von Rich. Dorstewitz in Leipzig u. Georg Ottersbach in Hamburg. Nr. 413.

Photographie.

Die Photographie. Von H. Keßler, Prof. an der k. k. Graphischen Lehr- und Versuchsanstalt in Wien. Mit 4 Taf. und 52 Abbild. Nr. 94.

Stenographie.

Stenographie nach dem System von F. X. Gabelsberger von Dr. Albert Schramm, Landesamtsassessor in Dresden. Nr. 246.

Die Redeschrift des Gabelsbergerschen Systems von Dr. Albert Schramm, Landesamtsassessor in Dresden. Nr. 368.

Lehrbuch der Vereinfachten Deutschen Stenographie (Einig.-System Stolze-Schrey) nebst Schlüssel, Lesestücken und einem Anhang von Dr. Amsel, Studienrat des Kadettenkorps in Bensberg. Nr. 86.

☞ Weitere Bände dieser einzelnen Abteilungen sind in Vorbereitung.